



Espaces profinis et problèmes de réalisabilité de structures algébriques comme cohomologie d'un espace topologique

Gérald Gaudens

► To cite this version:

Gérald Gaudens. Espaces profinis et problèmes de réalisabilité de structures algébriques comme cohomologie d'un espace topologique. Mathématiques [math]. Université de Nantes, 2002. Français. NNT: . tel-00002406

HAL Id: tel-00002406

<https://theses.hal.science/tel-00002406>

Submitted on 17 Feb 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NANTES

ÉCOLE DOCTORALE

SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'INFORMATION ET DES MATÉRIAUX

Année : 2002

N° B.U. :

Thèse de doctorat de l'université de Nantes

Spécialité : MATHÉMATIQUES

Présentée et soutenue publiquement par

Gérald GAUDENS

le 6 décembre 2002

à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes

**ESPACES PROFINIS ET PROBLÈMES DE
RÉALISABILITÉ EN TOPOLOGIE**

Jury

Président	:	J.-C. THOMAS	Professeur (Université d'Angers)
Rapporteurs	:	P. G. GOERSS	Professeur (Northwestern University)
		F. MOREL	Professeur (Université Paris VII)
Examineurs	:	V. FRANJOU	Professeur (Université de Nantes)
		G. POWELL	C.R. du C.N.R.S. (Université Paris XIII)
		L. SCHWARTZ	Professeur (Université Paris XIII)
		C. SORGER	Professeur (Université de Nantes)
Directeur de thèse	:	V. FRANJOU	
Laboratoire	:	Jean Leray (U.M.R. 6629 du CNRS/UN)	
Composante	:	Mathématiques (section 25)	

N° ED 0366-087

A l'Autre, qui par sa différence m'enrichit.

Ce travail de thèse représente pour moi la fin de quatre longues années de formation, riches en émotion et en enseignement, mais surtout une ouverture sur l'avenir.

Le sens d'un tel travail est d'essayer d'apporter une harmonie supplémentaire au chant (aux champs ?) de la connaissance, celui des mathématiques, en l'occurrence. Cela suppose, bien qu'une partie de ce travail ait lieu dans la solitude de la réflexion, de participer à la communauté des mathématiciens, qui est source et juge de ce travail.

Ainsi, ce travail de thèse a pour moi été avant toute chose l'occasion d'échanger des idées avec des personnes ayant du goût en mathématiques. La première d'entre elles fut (et continuera à être, je l'espère) mon directeur de thèse, Vincent Franjou, auquel je dois mes qualités (et mes défauts) de mathématicien en devenir. Vincent m'a offert d'être mon père-en-mathématiques ; ce modeste travail, je l'espère, honore la confiance qu'il m'a accordée.

Je dois des remerciements spéciaux à tous ceux dont l'exemple m'inspire, et parmi lesquels je compte les membres de mon jury : Fabien Morel, Geoffrey Powell, Lionel Schwartz, Cristoph Sorger, et enfin Jean-Claude Thomas qui m'a fait l'honneur de présider le Jury.

Les premiers lecteurs de ce travail, exception faite de Vincent, ont été P. G. Goerss et F. Morel, qui ont accepté de le rapporter. Ils ont pris le temps de me donner des critiques dont j'ai tiré profit.

J'ai eu le plaisir de travailler avec de nombreuses personnes, mais je pense maintenant plus particulièrement à deux d'entre elles, parce qu'elles m'ont profondément influencé, et aussi parce que j'ai eu le plaisir d'être leur co-auteur. Les discussions que j'ai eues avec Lionel Schwartz m'ont permis de découvrir une pratique des mathématiques empreinte d'expérience, d'efficacité, et de profondeur. Je veux lui exprimer ici toute mon admiration. Avec François-Xavier Dehon, j'ai profité de l'exigence, de l'enthousiasme, et de l'hospitalité d'un jeune et brillant mathématicien.

J'adresse encore des remerciements spéciaux à Laurent Piriou, pour tout, et à Francesca Gavioli pour le trèfle à quatre feuilles.

Au cours de ces années de thèse, ma vie mathématique a trouvé d'autres voies pour s'épanouir. Je pense en premier lieu au groupe de travail Nantes-Angers, où j'ai appris une bonne part des mathématiques que je sais ; et plus récemment, au groupe de travail de géométrie algébrique de Nantes. Je remercie chaleureusement tous les participants de ces deux groupes de travail, quitte à en remercier certains deux fois. L'enseignement a également été pour moi une grande source de satisfaction, souvent grâce à la compétence des collègues avec lesquels j'ai eu le plaisir de travailler. Enfin, les voyages pour les congrès m'ont offert des rencontres que je n'oublierai pas, et qui n'auraient pas été possibles sans le concours du groupement de recherche de topologie algébrique européen (GDRE 1110 du CNRS) et du réseau européen de topologie (RTN Modern Homotopy Theory). J'ai aussi eu la chance d'être accueilli par le Centre de Reserca Matemàtica de Barcelone et par le laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné de Nice.

Ma base pour tous ces voyages a été le laboratoire Jean Leray -et sa superbe bibliothèque, lieu de travail privilégié- qui m'a accueilli depuis le DEA. C'est l'occasion pour moi de remercier ceux qui en assurent le bon fonctionnement.

Enfin, merci à tous ceux que j'aime, et surtout à Elise, ma compagne, mes deux enfants, Moïse et Charlotte, mes parents et ma sœur.

Table des matières

Introduction	9
Présentation du travail	9
Résumé des résultats obtenus	12
 I Théorie homotopique des espaces profinis	 15
1 Théorie homotopique des espaces profinis	19
1.1 Préliminaires	20
1.2 Propriété du calcul homotopique de $\widehat{\mathcal{S}}$	25
1.3 Fibrations II	33
1.4 La suite spectrale de Serre dans $\widehat{\mathcal{S}}$	36
 2 La suite spectrale d'Eilenberg-Moore	 41
2.1 Construction de la suite spectrale	42
2.2 Propriétés de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore	46
 3 La convergence forte de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore	 49
3.1 Convergence forte	49
3.2 Données auxiliaires associées à la construction cobarre géométrique	51
3.3 Quelques lemmes algébriques	56
3.4 Démonstration du théorème de convergence forte	58
 II Modules instables	 61
4 Modules et Algèbres instables	65
4.1 L'algèbre de Steenrod	65
4.2 Suite spectrale d'Eilenberg-Moore et filtration nilpotente	73

5	La série de Loewy des algèbres instables	77
5.1	Sur certaines opérations universelles	77
5.2	Séries de loewy	83
5.3	La série de Loewy des algèbres instables	84
III	Une étude de quelques problèmes de non-réalisabilité	89
6	Position du problème	91
6.1	Introduction	91
6.2	Les conjectures de Kuhn	91
6.3	De l'utilisation des espaces profinis dans les problèmes de non réalisabilité	93
7	La conjecture forte de non-réalisation	95
7.1	Théorie de Lannes et réduction de N. Kuhn	95
7.2	Construction de classes de cohomologie et contradiction . . .	96
8	Quelques exemples de modules non-réalisables	103
8.1	Le module en losange	103
8.2	Non réalisabilité des modules $S_\lambda F(1)$	104
8.3	Non réalisabilité des modules $US_\lambda F(1)$	105
IV	Appendices	107
A	Topologie	109
A.1	Décompositions cellulaires admissibles	109
A.2	Crochets de Toda	109
B	Calculs homotopiques	111
B.1	Localisations	111
B.2	Foncteurs dérivés	112
B.3	Calculs homotopiques	112
B.4	Catégories de modèles simpliciales	113
C	Pro-catégories et espaces profinis	115
C.1	Pro-catégories	115
C.2	Ensembles profinis	116
C.3	Espaces profinis	118
C.4	Cohomologies des espaces profinis	123

C.5	Espaces profinis cosimpliciaux	125
C.6	Quasi-groupes abéliens profinis simpliciaux cosimpliciaux . . .	126

Introduction

Présentation du travail

Le mémoire de thèse de doctorat qui est présenté ici est composé de trois parties assez différentes.

La première partie est une contribution à la théorie homotopique des espaces profinis initiée par F. Morel dans [40]. On précise quelques points techniques concernant cette théorie homotopique. Si l'un des objectifs avoués de cette partie est de donner réponse à un certain nombre de points laissés en suspens dans [40], on développe aussi la théorie homotopique des espaces profinis dans l'objectif de construire une suite spectrale d'Eilenberg-Moore, dont nous avons besoin dans la troisième partie.

La seconde partie concerne la théorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod. Cette catégorie de modules a été intensivement étudiée pour son lien avec la topologie. En effet, la cohomologie singulière à coefficients dans un corps fini est naturellement un module instable sur l'algèbre de Steenrod. Cette structure s'est avérée suffisante pour résoudre des problèmes difficiles tels qu'une conjecture de D. Sullivan résolue par H. Miller [38]. On établit dans cette partie quelques lemmes techniques en vue de la troisième partie. On y démontre également un théorème de structure concernant les algèbres instables sur l'algèbre de Steenrod *modulo 2*, qui est un résultat nouveau. Ce théorème de structure, qui doit énormément à Lionel Schwartz a été conjecturé dans [54]. Il a été intégré à un article en commun avec L. Schwartz et a fait l'objet d'une prépublication à l'université Paris 13 [21].

Enfin dans la troisième partie, en s'appuyant sur les résultats des parties précédentes, on montre comment la démonstration du théorème principal de l'article de L. Schwartz [53] peut être généralisée, démontrant ainsi une conjecture de N. Kuhn. Cette partie du présent travail, qui a été réalisée avec François-Xavier Dehon, est disponible comme fichier informatique [10].

La troisième partie s'achève sur quelques considérations concernant des problèmes de réalisabilité de modules et d'algèbres instables sur l'algèbre de Steenrod.

Suivent ensuite trois appendices techniques, destinés à rendre le corps du texte aussi indépendant que possible de références externes. Le premier expose les résultats de topologie qui nous sont nécessaires. Le second et le troisième exposent les éléments de la théorie de l'algèbre homotopique et de la théorie des espaces profinis que nous utilisons.

Nous présentons maintenant le travail effectué de manière un peu plus détaillée, mais sans donner d'énoncé.

Première partie

Dans la première partie, on développe la théorie homotopique des espaces profinis. D. Quillen a axiomatisé les ingrédients nécessaires aux développements essentiels d'une théorie de l'homotopie dans un cadre abstrait. Son travail séminal [44] propose un cadre permettant de développer des techniques en tout point semblables à celles dont on dispose dans le cadre des espaces topologiques.

Rappelons que dans le cadre topologique, la théorie de l'homotopie s'intéresse *grosso modo* aux propriétés des espaces topologiques qui sont préservées par les applications continues induisant des isomorphismes sur les groupes d'homotopie, pour tout choix de point de base. De telles applications sont traditionnellement nommées *équivalences faibles*. Les équivalences faibles induisent par exemple des équivalences en homologie et cohomologie singulières. On dispose alors de nombreux outils, tels que la possibilité de remplacer n'importe quel espace topologique par un CW-complexe qui lui est faiblement équivalent, ou la théorie d'obstruction [6]. Un théorème de J. H. C. Whitehead affirme que toute équivalence faible entre deux CW-complexes est une équivalence d'homotopie. On en déduit qu'étudier les espaces topologiques *modulo* les équivalences faibles revient à étudier les CW-complexes *modulo* les équivalences d'homotopies.

En fait, D. Quillen montre que si une catégorie est munie d'une classe de morphismes satisfaisant à certains axiomes (voir B.3, p. 112), on dispose du cadre adéquat pour pouvoir utiliser toutes les techniques dont on dispose pour les espaces topologiques. La donnée d'une catégorie munie de morphismes satisfaisant à ces axiomes est appelée *une catégorie de modèles fermée*. L'étude abstraite des catégories de modèles fermées est *l'algèbre homotopique*. Nous avertissons le lecteur que nous introduisons la notion de

calcul homotopique pour désigner une catégorie munie d’une structure de catégorie de modèles fermée donnée.

Avertissement. *On désigne par calcul homotopique une catégorie munie d’une structure de catégorie de modèles fermée fixée.*

Lorsqu’on étudie les objets d’une catégorie en regardant ses objets *modulo* une classe de morphismes contenant celle des isomorphismes, qui constitue la classe des équivalences faibles, il est très utile de savoir que ces équivalences faibles font partie d’un calcul homotopique. Ceci est illustré par les travaux de F. Morel et V. Voevodsky [42], ou encore les travaux récents sur des modèles pour la théorie de l’homotopie stable avec un smash produit strictement associatif [17, 32, 25].

F. Morel a introduit [40], pour chaque nombre premier p , un calcul homotopique sur la catégorie des espaces profinis, dont les équivalences faibles sont les équivalences en cohomologie continue *modulo* p . Nous précisons dans le premier chapitre quelques points assez techniques sur ce calcul homotopique.

Avertissement. *Dans les seconde et troisième parties, on fixe $p = 2$.*

Seconde partie

Dans la seconde partie, nous rappelons quelques points de la théorie des modules sur l’algèbre de Steenrod *modulo* 2. Ces rappels sont nécessaires à la compréhension du troisième chapitre. Après quelques rappels sur une théorie devenue assez classique [51], nous démontrons quelques lemmes techniques qui nous sont utiles pour la suite. Ces résultats intermédiaires concernent certaines propriétés de la filtration nilpotente de la cohomologie singulière des espaces qui sont transmises à la cohomologie des espaces de lacets.

Un résultat nouveau apparaît dans cette partie, qui concerne certaines propriétés algébriques des algèbres instables. Ce résultat peut en quelque sorte être considéré comme un analogue algébrique des résultats qu’on cherche à atteindre dans le troisième chapitre.

Troisième partie

Enfin, dans la troisième partie, on étudie différents problèmes de non réalisabilité, *i.e.* on montre que certains modules et algèbres instables ne sont la cohomologie d’aucun espace, alors qu’ils pourraient l’être *a priori*. Le premier de ces problèmes de non réalisabilité concerne une conjecture due à N. Kuhn [28, *strong réalisation conjecture*, p. 324]. Cette conjecture a quasiment

été démontrée par L. Schwartz [53]. Sa méthode, prolongeant celle de [52], utilise la suite spectrale d'Eilenberg-Moore. Néanmoins, l'application directe de cette méthode mène entre autre à certains problèmes techniques afférents à la convergence de la suite spectrale. Nous montrons comment contourner ces problèmes en faisant intervenir les aspects du calcul homotopique de F. Morel développés dans la première partie. Cette contribution à la démonstration de la '*strong realization conjecture*' est un travail en commun avec François-Xavier Dehon.

Le second problème de non réalisabilité étudié concerne certaines algèbres instables réduites. L'intérêt de cette partie est de proposer des méthodes différentes de celles utilisées dans l'étude de la '*strong realization conjecture*'.

Résumé des résultats obtenus

Dans la première partie les résultats nouveaux précisent la structure du calcul homotopique de la catégorie des espaces profinis. Cette catégorie est notée $\widehat{\mathcal{S}}$. Le premier résultat est que le calcul homotopique de F. Morel est *propre*, c'est à dire que le changement de base d'une équivalence faible le long d'une fibration est une équivalence faible, et que le changement de cobase d'une équivalence faible le long d'une cofibration est une équivalence faible.

Théorème 1.2.2 *Le calcul homotopique de $\widehat{\mathcal{S}}$ est propre.*

Le calcul homotopique de $\widehat{\mathcal{S}}$ est muni d'un remplacement fibrant *fonctoriel* dérivé de la théorie de la complétion de Bousfield-Kan [5]. On montre :

Théorème 1.3.1 *Le remplacement fibrant d'une fibration est une fibration.*

On obtient ainsi des propriétés d'invariance homotopique intéressantes. Par exemple, on aboutit à une description efficace des fibrations.

Théorème 1.3.5 *A équivalence faible naturelle près, toute fibration f de $\widehat{\mathcal{S}}$ est une fibration entre espaces fibrants, qui s'écrit comme limite filtrante d'un diagramme de fibrations $f(-)$ entre p -espaces finis. De plus, la fibre de f est la limite des fibres des $f(i)$.*

Ceci nous permet de définir une suite spectrale d'Eilenberg-Moore dans $\widehat{\mathcal{S}}$, qui calcule la cohomologie de la fibre d'une fibration, connaissant celle de la base et celle de l'espace total. Lorsque f n'est pas une fibration, la suite spectrale est quand même définie, et converge vers la cohomologie de la fibre homotopique de f .

Théorème (section 2.2) *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme entre espaces profinis et y un point de Y . Il existe une suite spectrale d'Eilenberg-Moore,*

naturelle et convergente, *du second quadrant*, $\{(E_r^{s,t}, d_r^{s,t}), s \leq 0, t \geq 0\}$, qui converge vers la cohomologie la fibre homotopique de f au dessus de y .

On constate ici un phénomène tout à fait intéressant : contrairement à la situation classique des espaces topologiques, la suite spectrale d'Eilenberg-Moore est *toujours convergente*. Par contre, cette convergence n'est pas la meilleure qu'on puisse souhaiter. On peut donner un meilleur critère de convergence, à la manière du critère de convergence forte de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore usuelle de W. G. Dwyer [14].

Théorème 3.1.3 *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme entre espaces profinis fibrants et tel que Y est connexe. La suite spectrale d'Eilenberg-Moore profinie de f converge fortement vers la fibre homotopique F de f si et seulement si pour tout entier n , l'action d'holonomie du groupe fondamental profini $\pi_1 Y$ sur $H^n F$ est nilpotente.*

Dans la seconde partie, plusieurs démonstrations techniques très proches de celles qu'on trouve dans [53] sont établies. On montre également le théorème de structure suivant, qui concerne les algèbres instables.

Théorème 5.3.3 *Soit K une algèbre instable. On a l'alternative suivante :*

- *soit K est localement nilpotente (le sous-module de K constitué par les éléments de degré strictement positif est dans $\mathcal{N}il$) ;*
- *soit la série de Loewy (dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$) de K ne stabilise pas.*

Enfin, dans la troisième partie, on adapte la méthode de L. Schwartz [53] et on démontre le théorème suivant.

Théorème 6.3.1 *Soit X un espace profini dont la cohomologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 est dans un cran fini de la filtration de Krull de la catégorie \mathcal{U} . La cohomologie de X est localement finie.*

Ce théorème implique la *strong realization conjecture* de N. Kuhn [28], qui a été démontrée par L. Schwartz [53] sous des hypothèses de finitude, que nous pouvons ainsi enlever.

Théorème 6.3.2 *Soit X un espace topologique dont la cohomologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 est dans un cran fini de la filtration de Krull de la catégorie \mathcal{U} . La cohomologie de X est localement finie.*

Première partie

Théorie homotopique des
espaces profinis

Avertissement. *Dans toute cette partie, p désigne un nombre premier quelconque fixé.*

Chapitre 1

Théorie homotopique des espaces profinis

Introduction

Dans ce chapitre, on reprend et on développe certains aspects de la théorie homotopique des espaces profinis définie par F. Morel. Celui-ci a muni la catégorie des espaces profinis d'un calcul homotopique dont les équivalences faibles sont les isomorphismes en cohomologie continue modulo p , où p est un nombre premier fixé [40]. Des développements sont parus ensuite dans un article de P. G. Goerss [22] puis dans les travaux de F-X. Dehon [7, 8].

Les notions élémentaires concernant les espaces profinis sont rappelées en appendice (voir C.3.2 p. 118).

La première section de ce chapitre rappelle la définition du calcul homotopique de $\widehat{\mathcal{S}}$. Dans la seconde section, on rappelle comment la p -complétion de Bousfield-Kan fournit un remplacement fonctoriel dans le calcul homotopique de $\widehat{\mathcal{S}}$. La fonctorialité de ce remplacement fibrant, conjuguée à une technique de réindexation permet de remplacer certains diagrammes par des diagrammes faiblement équivalents plus maniables du point de vue homotopique. On rappelle ensuite certains résultats concernant les fibrations du calcul homotopique de $\widehat{\mathcal{S}}$, qui sont utilisés pour établir que le calcul homotopique de $\widehat{\mathcal{S}}$ est propre. Suivent de nouvelles considérations sur les fibrations qui précèdent l'introduction d'une suite spectrale de Serre pour les fibrations de $\widehat{\mathcal{S}}$ en utilisant la méthode de A. Dress [12].

1.1 Préliminaires

1.1.1 Le calcul homotopique de F. Morel

Le résultat sur lequel reposent tous les développements de cette partie, dû à F. Morel, fournit un cadre adéquat pour utiliser des techniques homotopiques dans la catégorie $\widehat{\mathcal{S}}$ des espaces profinis.

Théorème 1.1.1 [40, théorème 1] *Les classes suivantes de morphismes définissent sur la catégorie $\widehat{\mathcal{S}}$ une structure de catégorie de modèles fermée simpliciale au sens de D. Quillen (voir [44, II, § 1 et 2] et B.3, p. 112) :*

- les équivalences faibles sont les morphismes qui induisent un isomorphisme en cohomologie continue modulo p ,
- les cofibrations sont les monomorphismes de $\widehat{\mathcal{S}}$ (i.e. les morphismes injectifs degré par degré),
- les fibrations sont imposées par les conditions de relèvement habituelles (voir B.3 p. 112).

On obtient également un calcul homotopique sur la catégorie des espaces profinis pointés. A moins que cela ne soit explicitement mentionné, on travaille toujours avec la catégorie homotopique des espaces profinis non pointés.

Avertissement. *Dans toute la suite, la structure de catégorie de modèles fermée simpliciale donnée par le théorème 1.1.1 est appelée calcul homotopique de $\widehat{\mathcal{S}}$.*

1.1.2 Remplacement fibrant

La définition suivante provient de [40].

Définition 1.1.2 (p-espaces finis et pro-p-espaces) *Un p-espace fini est un ensemble simplicial X satisfaisant aux propriétés suivantes :*

- X est un ensemble simplicial fibrant (au sens de D. Kan, cf [36]),
- X est un ensemble fini simplicial,
- pour tout choix de point base x dans X et pour tout entier $n \geq 1$, le groupe $\pi_n(X, x)$ est non nul pour un nombre fini de valeurs de n ,
- dans le cas où le groupe $\pi_n(X, x)$ est non nul, c'est un p -groupe fini.

Un pro-p-espace fini est un pro-objet (voir définition C.1.2 p. 115) à valeurs dans les p-espaces finis. Un pro-p-espace est la limite d'un pro-p-espace fini.

Remarque 1.1.3 *Un p-espace fini X est nilpotent : pour tout choix de point de base x dans X et pour tout entier $n \geq 1$, l'action du groupe fondamental de X en x sur les groupes d'homotopie $\pi_n(X, x)$ est nilpotente.*

Tout espace profini X est limite dans $\widehat{\mathcal{S}}$ du diagramme formé des ensembles finis simpliciaux X/R , où R décrit l'ensemble \mathcal{R} , ordonné par l'inclusion, des relations d'équivalences simpliciales ouvertes sur X (voir la proposition C.3.1 p. 118).

Pour tout R dans \mathcal{R} , la tour des espaces totaux partiels $\{(\mathbb{F}_p)_s(X/R)\}_{s \in \mathbb{N}}$ de Bousfield et Kan [5, page 21] est une tour de fibrés principaux sous l'action de \mathbb{F}_p -espaces vectoriels finis simpliciaux. Ainsi les espaces, $(\mathbb{F}_p)_s(X/R)$ sont des ensembles finis simpliciaux, fibrants dans $\widehat{\mathcal{S}}$ pour tout s . D'après [13], l'application canonique est un isomorphisme :

$$H^*X = \operatorname{colim}_s H^*(\mathbb{F}_p)_s(X/R) \xrightarrow{\cong} H^*(X/R) \quad (1.1)$$

La tour des espaces totaux partiels étant fonctorielle, on obtient un pro-objet fonctoriel en X , à valeurs dans $\widehat{\mathcal{S}}$ formé par les espaces $\{(\mathbb{F}_p)_s(X/R)\}_{R \in \mathcal{R}, s \in \mathbb{N}}$, dont la limite dans $\widehat{\mathcal{S}}$ est notée RX . Les augmentations canoniques $X \rightarrow \{X/R\}_{R \in \mathcal{R}}$ et $X/R \rightarrow (\mathbb{F}_p)_s(X/R)_{s \in \mathbb{N}}$ induisent un morphisme canonique

$$X \rightarrow \{(\mathbb{F}_p)_s(X/R)\}_{R \in \mathcal{R}, s \in \mathbb{N}}$$

et donc un morphisme canonique

$$X \rightarrow RX$$

En vertu des isomorphismes (1.1) et $H^*X \cong \operatorname{colim}_{R \in \mathcal{R}} H^*(X/R)$ (cf C.4 p. 123, section C.4.1), cet isomorphisme canonique induit des isomorphismes :

$$H^*X \cong \operatorname{colim}_{R \in \mathcal{R}, s \in \mathbb{N}} H^*(\mathbb{F}_p)_s(X/R) \cong H^*RX \quad . \quad (1.2)$$

Les espaces X et RX sont donc naturellement faiblement équivalents. Cette construction fournit un remplacement fibrant *fonctoriel* :

Proposition 1.1.4 [40, §2.1, proposition 2] *L'application naturelle*

$$X \rightarrow RX$$

est une équivalence faible dans $\widehat{\mathcal{S}}$. L'objet RX est fibrant dans $\widehat{\mathcal{S}}$.

Comme les espaces $(\mathbb{F}_p)_s(X/R)$ sont fibrants dans la catégorie des ensembles simpliciaux, la résolution fibrante RX d'un espace profini X est limite d'un diagramme d'espaces fibrants dans \mathcal{S} (en oubliant la topologie profinie) [5]. Il est possible d'être plus précis. Pour toute relation d'équivalence simpliciale ouverte R sur X , on peut former la tour de Postnikov

de l'espace total partiel $(\mathbb{F}_p)_s(X/R)$. La tour des troncatures de Postnikov $\{P^t(\mathbb{F}_p)_s(X/R)\}_{t \in \mathbb{N}}$ est une tour de p -espaces finis, munie d'une augmentation canonique $(\mathbb{F}_p)_s(X/R) \longrightarrow \{P^t(\mathbb{F}_p)_s(X/R)\}_{t \in \mathbb{N}}$ qui induit un isomorphisme :

$$(\mathbb{F}_p)_s(X/R) \longrightarrow \lim_{t \in \mathbb{N}} P^t(\mathbb{F}_p)_s(X/R) \quad .$$

Par conséquent, l'application canonique

$$\operatorname{colim}_t H^*(\mathbb{F}_p)_s(X/R) \longrightarrow H^*(\mathbb{F}_p)_s(X/R)$$

est un isomorphisme. Le remplacement fibrant RX de X est donc naturellement isomorphe à un pro- p -espace fini. On obtient donc :

Lemme 1.1.5 *Soit X un espace profini. Le remplacement fibrant de Bousfield-Kan RX de X est naturellement isomorphe à un pro- p -espace.*

Avertissement. *On abusera dans la suite de la naturalité de l'isomorphisme décrit dans le lemme 1.1.5 et on identifiera, pour tout espace profini X , le remplacement fibrant de Bousfield-Kan RX de X et le pro- p -espace limite du pro- p -espace fini $\{P^t(\mathbb{F}_p)_s(X/R)\}_{(s,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, R \in \mathcal{R}}$!!!!;*

Dans la prochaine section, le résultat précédent va être légèrement généralisé.

1.1.3 Représentation canonique des diagrammes admissibles

Soit I une catégorie admissible (voir C.2.4, p. 117) et D un I -diagramme dans $\widehat{\mathcal{S}}$. La conjonction de la proposition C.2.5 avec les considérations précédentes sur le remplacement fibrant ont pour conséquence la proposition suivante.

Proposition 1.1.6 *Soit I une catégorie admissible (voir C.2.4, p. 117). À équivalence faible naturelle près dans $\widehat{\mathcal{S}}^I$, $D(-)$ peut être considéré comme un I -diagramme entre espaces fibrants. De plus, ce I -diagramme peut être représenté par un pro-objet dans la catégorie des I -diagrammes de p -espaces finis.*

1.1.4 Fibrations I

Pour plus de précisions concernant cette partie, nous invitons le lecteur à consulter [40, § 1.4 et § 1.5] et [22, p. 72-74].

Fibrations

Soit n un entier naturel strictement positif. Soit M un groupe abélien simplicial. Les foncteurs de $\widehat{\mathcal{S}}$ dans les groupes abéliens, qui à un espace profini X font correspondre le groupe abélien $Z^n(X, M)$ (respectivement $C^n(X, M)$) des n -cycles de X (respectivement n -cochaînes de X) sont représentables par des groupes abéliens profinis simpliciaux $K(M, n)$ (respectivement $L(M, n)$). La différentielle, qui est une transformation naturelle de $C^{n-1}(-, M)$ dans $Z^n(-, M)$ induit un morphisme de $\widehat{\mathcal{S}}$:

$$\phi_{M,n} : L(M, n-1) \longrightarrow K(M, n) \quad .$$

Lorsque M est un pro- p -groupe abélien, ce morphisme est une fibration dans le calcul homotopique de $\widehat{\mathcal{S}}$.

Définition 1.1.7 (Fibrations élémentaires) *Une fibration élémentaire est un produit quelconque de fibrations $\phi_{M,n}$ où pour tout n , le pro- p -groupe abélien M est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel profini.*

Cette terminologie est justifiée par le fait que toute fibration élémentaire est une fibration entre espaces fibrants dans le calcul homotopique de $\widehat{\mathcal{S}}$.

Définition 1.1.8 (Fibrations test) *Une fibration test est un changement de base d'une fibration élémentaire le long d'un morphisme quelconque.*

Description des fibrations

Définition 1.1.9 *On dit qu'une classe de morphismes d'une catégorie \mathbf{C} est saturée si elle est stable par rétractes, par changements de base, par limites inverses dénombrables et par produits. La classe saturée d'une classe \mathcal{C} de morphismes de \mathbf{C} est la plus petite classe saturée de morphismes qui contient \mathcal{C} .*

Cette définition prend son intérêt dans le contexte des espaces profinis avec la remarque suivante de P. G. Goerss.

Proposition 1.1.10 [22, lemma 1.19] *La classe des fibrations du calcul homotopique de Morel est la saturée de la classe des morphismes $\phi_{M,n}$ (voir la définition 1.1.7).*

On peut être plus précis quant à la description des fibrations.

Proposition 1.1.11 *Tout f morphisme dans $\widehat{\mathcal{S}}$ admet la description suivante.*

- *Le morphisme f se factorise comme composé $f = l \circ j$ d'une fibration l et d'une cofibration triviale j .*

- La fibration l se factorise comme composé de $g \circ h$ de deux fibrations.
- La fibration h est triviale, et s'écrit comme projection sur le premier facteur d'un produit $X \times L$, où L est un espace fibrant et contractile.
- La fibration g est limite inverse d'une tour de fibrations g_n .
- Pour tout entier naturel n , la fibration g_n est de la forme $g'_n \circ p$, où $g'_n : Z'_n \longrightarrow Z'_{n-1}$ est une fibration test (voir la définition 1.1.8, p. 23), et p est la projection sur le premier facteur du produit de Z'_n et d'un espace fibrant Z''_n .

Démonstration. Ceci résulte de la démonstration par F. Morel [40, proposition 1, p.355-358] de l'axiome de factorisation d'un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ quelconque de $\widehat{\mathcal{S}}$ comme composé d'une fibration et d'une cofibration triviale. Celui-ci montre que tout morphisme f se factorise sous la forme

$$f = g \circ h \circ j$$

où

- $g : Z \longrightarrow Y$ est limite inverse d'une tour de fibrations

$$Z = \lim Z_n \longrightarrow \dots Z_n \xrightarrow{g_n} Z_{n-1} \dots Z_1 \xrightarrow{g_1} Z_0 = Y \quad ,$$

- pour tout entier naturel n , g_n est une fibration de la forme $g'_n \circ p$, où $g'_n : Z'_n \longrightarrow Z'_{n-1}$ est une fibration test, et p est la projection sur le premier facteur du produit de Z'_n et d'un espace fibrant Z''_n .
- le morphisme $h : T \longrightarrow Z$ est une fibration triviale, qui s'écrit comme projection sur le premier facteur d'un produit $X \times L$, où L est un espace fibrant et contractile.
- le morphisme $j : X \longrightarrow T$ est une cofibration triviale.

□

Lorsque f est une fibration, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{Id}} & X \\ j \downarrow & \nearrow r & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{g \circ h} & Y \end{array} \quad (1.3)$$

L'existence du relèvement r est assurée par la propriété de relèvement car f est une fibration et j une cofibration triviale (voir B.3). Présenté sous une forme légèrement différente, ce diagramme devient le diagramme commuta-

tif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Id & & \\
 & \nearrow \simeq & & \nwarrow \simeq & \\
 X & \xrightarrow{j} & T & \xrightarrow{r} & X \\
 f \downarrow & & \downarrow g \circ h & & \downarrow f \\
 Y & \xrightarrow{Id} & Y & \xrightarrow{Id} & Y
 \end{array} \tag{1.4}$$

Ceci montre que f est rétracte de la fibration $l = g \circ h$.

Le morphisme j est une cofibration triviale, ceci impose que r soit également une équivalence faible. On obtient donc :

Proposition 1.1.12 *Toute fibration f de $\widehat{\mathcal{S}}$ est rétracte d'une fibration l telle que :*

- la fibration l est composée $g \circ h$ de deux fibrations,
- la fibration h est triviale, et s'écrit comme projection sur le premier facteur d'un produit $X \times L$, où L est un espace fibrant et contractile,
- la fibration g est limite inverse d'une tour de fibrations g_n ,
- pour tout entier naturel n , la fibration g_n est de la forme $g'_n \circ p$, où $g'_n : Z'_n \rightarrow Z'_{n-1}$ est une fibration test, et p est la projection sur le premier facteur du produit de Z'_n et d'un espace fibrant Z''_n .

De plus la rétraction qui définit f en fonction de l est du type donné par le diagramme (1.4).

1.2 Propreté du calcul homotopique de $\widehat{\mathcal{S}}$

1.2.1 Théorème de propreté

Dans une catégorie de modèles abstraite, les objets qui revêtent une signification homotopique sont les objets qui sont fibrants et cofibrants. Tout objet d'une catégorie de modèles est équivalent à un objet fibrant et cofibrant, qu'on peut choisir fonctoriellement dans le calcul homotopique de F. Morel d'après la section 1.1.2 p. 20. Il est néanmoins possible d'obtenir, dans la situation d'un *calcul homotopique propre*, des propriétés d'invariance homotopique qui ne dépendent que des morphismes, et non du fait que leur source ou leur but aie une signification homotopique.

Définition 1.2.1 (Propreté d'un calcul homotopique) *Un calcul homotopique est propre s'il satisfait aux deux conditions suivantes.*

1. *Il est propre à droite : la classe des équivalences faibles est stable par changement de base le long d'une fibration.*

2. Il est propre à gauche : la classe des équivalences faibles est stable par changement de cobase le long d'une cofibration.

L'objectif de cette section est de montrer que le calcul homotopique de $\widehat{\mathcal{S}}$ est propre.

Théorème 1.2.2 *Le calcul homotopique de $\widehat{\mathcal{S}}$ est propre.*

Remarque 1.2.3 *Il est possible de montrer de la même manière que le calcul homotopique des espaces profinis pointés est propre, avec une démonstration semblable à celle qui est proposée ici.*

Si la propreté à gauche est une conséquence formelle du fait que tous les objets de $\widehat{\mathcal{S}}$ sont cofibrants dans le calcul homotopique de $\widehat{\mathcal{S}}$, la propreté à droite nécessite une étude précise des fibrations.

Le fait qu'une catégorie de modèle dont tous les objets sont cofibrants est propre à gauche est démontré dans [24, corollary 11.1.3, p. 196], voir aussi [23, II. 8]. On a donc :

Proposition 1.2.4 *Le calcul homotopique de $\widehat{\mathcal{S}}$ est propre à gauche.*

Il reste donc à montrer que le calcul homotopique de $\widehat{\mathcal{S}}$ est propre à droite, ce qui est l'objet de la prochaine section.

1.2.2 Propreté à droite

Pour montrer la propreté à droite, on se donne un diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{f^* \alpha} & \bullet \\ \alpha^* f \downarrow & & \downarrow f \\ \bullet & \xrightarrow{\alpha} & \bullet \end{array} \quad (1.5)$$

où f est une fibration et α une équivalence faible. Le fait que $\alpha^* f$ est une fibration est formel. On doit montrer que $f^* \alpha$ est une équivalence faible.

D'après la description des fibrations donnée précédemment (voir 1.1.12 p. 25), la fibration f est rétracte d'une fibration l qui se décompose à son tour en $l = g \circ h$, où g est limite inverse d'une tour de fibrations $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et h est une fibration triviale qui est la projection sur le premier facteur du produit d'un espace profini et d'un espace profini fibrant contractile. On a donc un diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{f} & \\
 \downarrow \scriptstyle j \cong & & \downarrow \scriptstyle t \cong \\
 Id \bullet & \xrightarrow{h} \bullet \cdots \bullet \xrightarrow{g_3} \bullet \xrightarrow{g_2} \bullet \xrightarrow{g_1} \bullet & Id \\
 \uparrow \scriptstyle j \cong & & \uparrow \scriptstyle t \cong \\
 & \xrightarrow{f} &
 \end{array}
 \quad (1.6)$$

On introduit le changement de base $l^*\alpha$ de α le long de l , et le changement de base α^*l de l le long de α . On obtient le diagramme (1.7) p. 29.

Les flèches ϕ et ψ sont induites par propriété universelle des changements de base. On obtient formellement le lemme suivant :

Sorite 1.2.5 *Le morphisme $f^*\alpha$ est une équivalence faible si $l^*\alpha$ est une équivalence faible.*

Démonstration. Le morphisme $\phi \circ \psi$ est une identité par unicité dans la propriété universelle des changements de base. Par conséquent, le morphisme $f^*\alpha$ est rétracte de $l^*\alpha$. Il suit que si $l^*\alpha$ est une équivalence faible, il en est de même de $f^*\alpha$, car la classe des équivalences faibles est stable par rétracte. \square

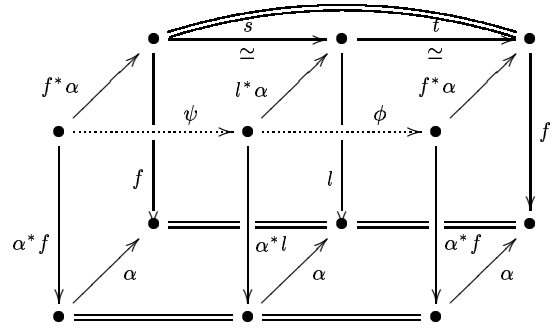
Sorite 1.2.6 *Le morphisme $l^*\alpha$ est une équivalence faible si le changement de base d'une équivalence faible le long d'une fibration test est une équivalence faible.*

Démonstration du sorite 1.2.6. On revient à la décomposition de la fibration l sous la forme $l = g \circ h$, où g est limite inverse d'une tour de fibrations $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, telle que chaque fibration g_n est une fibration de la forme $g'_n \circ p$ avec :

- La fibration $g'_n : Z'_n \longrightarrow Z'_{n-1}$ est une fibration test,
- La fibration p est la projection sur le premier facteur du produit de Z'_n et d'un espace fibrant Z''_n .

Soit $\alpha_0 = \alpha$, et pour $n \geq 1$, soit α_n le changement de base de α le long de $g_1 \circ \dots \circ g_n$. On va montrer que par récurrence sur n que, pour tout entier n , le morphisme α_n est une équivalence faible.

Le morphisme α_0 est une équivalence faible par hypothèse. Le morphisme α_{n+1} est le changement de base de α_n le long de g_{n+1} . Supposons que α_n est une équivalence faible.



(1.7)

La fibration g_{n+1} est une fibration de la forme $g'_{n+1} \circ p$, où $g'_{n+1} : Z'_{n+1} \rightarrow Z_n$ est une fibration test, et p est la projection sur le premier facteur du produit de $Z_{n+1} = Z'_{n+1} \times Z''_{n+1}$. Soit α'_{n+1} le changement de base de α_n le long de $g'_{n+1} : Z'_{n+1} \rightarrow Z_n$. La description de g_{n+1} montre que α_{n+1} est le produit de α'_{n+1} et de l'identité de Z''_n . Si on suppose que les changements de base d'équivalences faibles le long de fibrations test sont des équivalences faibles, alors α'_{n+1} est une équivalence faible. Ceci achève la récurrence.

Lemme 1.2.7 *Une limite filtrante d'équivalences faibles de $\widehat{\mathcal{S}}$ est une équivalence faible de $\widehat{\mathcal{S}}$.*

En appliquant le lemme 1.2.7, on obtient que $\alpha_\infty = \lim_i \alpha_i$ est une équivalence faible.

Soient $h^* \alpha_\infty$ le changement de base de α_∞ le long de h , et $\alpha_\infty^* h$ le changement de base de h le long de α_∞ . La propriété universelle des changements de base assure qu'en fait, $l^* \alpha$ et $h^* \alpha_\infty$ sont un seul et même individu. D'autre part, $\alpha_\infty^* h$ est une fibration triviale car les changements de base préservent les fibrations triviales. Par la règle des deux sur trois, $l^* \alpha = h^* \alpha_\infty$ est aussi une équivalence faible. Pour montrer la propriété à droite, il reste donc à montrer :

Lemme 1.2.8 *Le changement de base d'une équivalence faible le long d'une fibration test est une équivalence faible.*

Démonstration. On se donne un diagramme commutatif (\mathcal{P}) :

$$\begin{array}{ccccc}
 E' & \xrightarrow{f^* \alpha} & E & \longrightarrow & L(M) \\
 \downarrow \alpha^* f & & \downarrow f & & \downarrow \Phi_M \\
 B' & \xrightarrow[\alpha]{\sim} & B & \longrightarrow & K(M)
 \end{array} \tag{1.8}$$

où les deux carrés sont cartésiens, α est une équivalence faible et M un espace vectoriel profini gradué. On veut montrer que $f^* \alpha$ est une équivalence faible. On va appliquer un argument de suite spectrale.

Notons pour commencer que tout \mathbb{F}_p -espace vectoriel profini simplicial est un produit $\prod \mathbb{F}_p$. Le \mathbb{F}_p -espace vectoriel profini simplicial $K(M)$ peut donc être représenté comme un pro-objet $K((M(-)))$ indexé par une catégorie cofiltrante J , tel que pour tout j dans J , $K((M(j))) = K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, n_j)$. D'après

le lemme de réindexation C.1.3, le diagramme fini et sans boucles

$$B' \longrightarrow B \longrightarrow K(M)$$

peut être représenté comme un pro-diagramme indéxé par une catégorie co-filtrante I dans les ensembles finis simpliciaux :

$$B'(-) \longrightarrow B(-) \longrightarrow K(M(-)) \quad .$$

Soit $\Phi_{M(i)} : L(M(i)) \longrightarrow K(M(i))$ le fibré universel de base $M(i)$ (voir 1.1.4 p.22). Par changement de base, on obtient pour tout i un diagramme commutatif (\mathcal{P}_i) :

$$\begin{array}{ccccc} E'(i) & \xrightarrow{f(i)^* \alpha(i)} & E(i) & \longrightarrow & L(M(i)) \\ \downarrow \alpha(i)^* f(i) & & \downarrow f(i) & & \downarrow \Phi_{M(i)} \\ B'(i) & \xrightarrow{\alpha(i)} & B(i) & \longrightarrow & K(M(i)) \end{array} \quad (1.9)$$

Par commutation des limites entre elles, la limite sur I des diagrammes (\mathcal{P}_i) est le diagramme $\mathcal{P}(1.8)$.

Dans la catégorie \mathcal{S} des ensembles simpliciaux, l'espace $E(i)$ (respectivement $E'(i)$) est la fibre homotopique de $X(i) \longrightarrow K(M(i))$ (respectivement $X'(i) \longrightarrow K(M(i))$).

Pour chaque diagramme \mathcal{P}_i , on a deux suites spectrales d'Eilenberg-Moore cohomologiques $\{E_r^{s,t}\}_{r \in \mathbb{N}}$ et $\{E'_r{}^{s,t}(i)\}_{r \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} E_2^{s,t}(i) &= \mathrm{Tor}_{H^*K(M(i))}^{s,t}(H^*B(i), \mathbb{F}_p) \Rightarrow H^{s+t}E(i) \\ \text{et } E_2^{s,t}(i) &= \mathrm{Tor}_{H^*K(M(i))}^{s,t}(H^*B'(i), \mathbb{F}_p) \Rightarrow H^{s+t}E'(i) \end{aligned}$$

La suite spectrale d'Eilenberg-Moore que nous utilisons est celle définie par Rector [46], voir également 2.1 p. 42, qui provient d'une construction géométrique.

Lemme 1.2.9 *Les suite spectrales d'Eilenberg-Moore $\{E_r^{s,t}(i)\}_{r \in \mathbb{N}}$ et $\{E'_r{}^{s,t}(i)\}_{r \in \mathbb{N}}$ définies ci-dessus convergent fortement respectivement vers $H^*E(i)$ et $H^*E'(i)$*

Démonstration du lemme 1.2.9. La démonstration du lemme repose sur le théorème suivant de B. Shipley de convergence de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore [50, th. 3.1, page 186] :

Théorème 1.2.10 *On considère un carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow f \\ B' & \xrightarrow{g} & B \end{array} \quad (1.10)$$

où f est une fibration. Supposons que :

- $\pi_0 B' \times_{\pi_0 B} \pi_0 E$ est fini,
- l'action du groupe $\pi_1(B, f(y))$ sur $H_* F_y$ est nilpotente pour tout point y dans Y_y , où Y_y est dans l'image de $\pi_0 B' \times_{\pi_0 B} \pi_0 E$, et F_y est la fibre de f au dessus de y .

Alors la suite spectrale d'Eilenberg-Moore associé au diagramme 1.10 converge fortement vers $H^* E'$.

Dans notre situation, on a :

1. l'espace $K(M(i))$ est un p -groupe abélien fini simplicial (en fait un \mathbb{F}_p -espace vectoriel simplicial),
2. le morphisme $L(M(i)) \longrightarrow K(M(i))$ est une fibration,
3. les espaces $B(i)$ et $E(i)$ sont des ensembles finis simpliciaux.

Comme on travail en cohomologie, on commence par remarquer que les hypothèses finitude (point 1 ci-dessus) assurent que la dualisation est inno-cente, et qu'on peut utiliser la version cohomologique du théorème de B. Shipley.

Le second point résulte de ce qu'on n'a à considérer que des actions de p -groupes fini sur des p -groupes finis, qui sont toujours nilpotente (points 1 et 3 ci-dessus).

Enfin, le morphisme $L(M(i)) \longrightarrow K(M(i))$ est une fibration (point 2 ci-dessus).

Par conséquent la suite spectrale $\{E_r^{s,t}\}_{r \in \mathbb{N}}$ (respectivement $\{E_r'^{s,t}(i)\}_{r \in \mathbb{N}}$) converge (fortement) vers $H^* E(i)$ (respectivement $H^* E'(i)$). Le groupe $H^* E(i)$ (respectivement $H^* E'(i)$) admet donc une filtration *croissante* $\{F_s(i)\}_{s \in \mathbb{N}}$ (respectivement $\{F'_s(i)\}_{s \in \mathbb{N}}$) telle que $\text{colim}_s F_s(i) = H^* E(i)$ (respectivement $\text{colim}_s F'_s(i) = H^* E'(i)$).

La naturalité de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore cohomologique fournit :

- pour tout i , un morphisme de comparaison $c_i : \{E_r^{s,t}(i)\}_r \longrightarrow \{E_r'^{s,t}(i)\}_r$,
- pour tout morphisme $j \longrightarrow i$ de I , des morphismes de suites spectrales $\{E_r^{s,t}(i)\}_r \longrightarrow \{E_r^{s,t}(j)\}_r$ et $\{E_r'^{s,t}(i)\}_r \longrightarrow \{E_r'^{s,t}(j)\}_r$ compatibles aux morphismes de comparaison c_i et c_j .

On définit :

- $E_r^{s,t} = \text{colim } E_r^{s,t}(-)$ et $E_r'^{s,t} = \text{colim } E_r'^{s,t}(-)$,
- $F_s = \text{colim } F_s(-)$ et $F'_s = \text{colim } F'_s(-)$,
- $c = \text{colim } c(-) : E_r^{s,t} \longrightarrow E_r'^{s,t}$.

On a $\text{colim } H^*E(-) \cong H^*E$ et $\text{colim } H^*E'(-) \cong H^*E'$, et donc F_s (respectivement F'_s) sont des filtrations de H^*E (respectivement H^*E'). Les colimites filtrantes de groupes abéliens étant exactes, il vient que :

- $\{E_r^{s,t}\}_r$ et $\{E_r'^{s,t}\}_r$ sont des suites spectrales,
- L'aboutissement de la suite spectrale $\{E_r^{s,t}\}_r$ (respectivement $\{E_r'^{s,t}\}_r$) est le gradué associé à la filtration F_s (respectivement la filtration F'_s).

Par commutation des colimites entre elles, on a :

$$\text{colim}_s F_s = \text{colim}_s \text{colim}_i F_s(i) = \text{colim}_i \text{colim}_s F_s(i) = \text{colim}_i H^*E(i) = H^*E$$

et de même $\text{colim}_s F'_s = H^*E'$. Les suites spectrales colimites convergent donc respectivement vers H^*E et H^*E' . Il résulte des considérations précédentes que pour montrer que $f^*\alpha$ est une équivalence faible (*i.e.* que $H^* f^*\alpha$ est un isomorphisme), il suffit montrer que le morphisme de comparaison de suites spectrales $c : \{E_r^{s,t}\}_r \longrightarrow \{E_r'^{s,t}\}_r$ induit un isomorphisme entre les termes $E_\infty^{s,t}$ et $E_\infty'^{s,t}$.

On tire parti de la construction cobarre *géométrique* de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de Rector [46], qui pour tout i fournit un terme $E_1^{s,t}(i)$ (respectivement $E_1'^{s,t}(i)$) qui s'exprime uniquement en terme de produits tensoriels de $H^*K(M(i))$ et $H^*B(i)$ (respectivement $H^*K(M(i))$ et $H^*B(i)$) et fournit un morphisme de comparaison induit par $H^*\alpha(i)$. Par passage aux colimites filtrantes sur i , on obtient des termes $E_1^{s,t}$ et $E_1'^{s,t}$. Les colimites filtrantes sont exactes et commutent aux produits tensoriels, et donc le morphisme de comparaison entre les $E_1^{s,t}$ et $E_1'^{s,t}$ est induit par $\text{colim } H^*\alpha(-) = H^*\alpha$ qui est un isomorphisme par hypothèse. Ainsi, le morphisme de comparaison c est un isomorphisme entre les premiers termes des deux suites spectrales et donc un isomorphisme à l'aboutissement. Donc $H^* f^*\alpha$ est un isomorphisme; autrement dit, $f^*\alpha$ est une équivalence faible. Ceci achève la preuve du théorème de propriété 1.2.2. \square

1.3 Fibrations II

1.3.1 Fibrations et remplacement fibrant

Théorème 1.3.1 *Soit $f : E \longrightarrow B$ une fibration dans $\widehat{\mathcal{S}}$. Le remplacement fibrant $Rf : RE \longrightarrow RB$ est une fibration dans $\widehat{\mathcal{S}}$.*

Démonstration. De [40, proposition 2, p. 361], on déduit que tout épimorphisme de groupes abéliens profinis simpliciaux est une fibration du calcul homotopique de $\widehat{\mathcal{S}}$.

D'autre part, toute fibration $f : X \longrightarrow Y$ de $\widehat{\mathcal{S}}$ est un épimorphisme, comme le montrent les propriétés des relèvements (voir B.3) appliquées au diagramme suivant, en remarquant que $* \longrightarrow *$ est une cofibration triviale :

$$\begin{array}{ccc} * & \longrightarrow & X \\ \downarrow \simeq & & \downarrow f \\ * & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Notons $c\widehat{\mathcal{S}}$ la catégorie des espaces profinis cosimpliciaux. Le foncteur $\text{Tot} : c\widehat{\mathcal{S}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{S}}$ est adjoint à droite du foncteur $\Delta : \widehat{\mathcal{S}} \longrightarrow c\widehat{\mathcal{S}}$ qui associe à un espace profini X le diagramme cosimplicial égal à $X \times \Delta[\bullet]$.

Le calcul homotopique de $\widehat{\mathcal{S}}$ induit sur $c\widehat{\mathcal{S}}$ un calcul homotopique appelé calcul homotopique de Reedy (voir [23, chapitre VII, p. 353-387] pour la définition du calcul homotopique de Reedy sur $c\widehat{\mathcal{S}}$). Le calcul homotopique de Reedy est simplicial, puisque celui de \mathcal{S} l'est.

Le foncteur c préserve les cofibrations et cofibrations triviales, et donc sont adjoint Tot préserve les fibrations [23, chapitre II, lemma 7.9 et remark 7.10].

Revenons maintenant à la définition de RX . Le foncteur d'oubli des ensembles profinis simpliciaux dans les ensembles simpliciaux admet un adjoint à gauche $\mathbb{F}_p[-]$ (voir la section 2.1.2, p. 44). Cette paire de foncteurs donne lieu à une résolution cosimpliciale fonctorielle $\mathbb{F}_p^\bullet[-]$.

L'espace $\text{Tot } \mathbb{F}_p^\bullet[X]$ est naturellement isomorphe à RX . En effet, le morphisme canonique $\text{Tot } \mathbb{F}_p^\bullet[X] \longrightarrow RX$ est un isomorphisme pour des raisons formelles (Voir [40] et [22]).

Comme adjoint à gauche, $\mathbb{F}_p[-]$ préserve les épimorphismes. Par conséquent, si f est une fibration dans $\widehat{\mathcal{S}}$, alors f est un épimorphisme et donc $\mathbb{F}_p^n[f]$ est aussi un épimorphisme (et donc une fibration) pour tout entier n .

L'espace profini cosimplicial $\mathbb{F}_p^\bullet[-]$ n'est pas un groupe abélien profini simplicial cosimplicial, car d^0 n'est pas un morphisme de groupes abéliens profinis simpliciaux. C'est pour cela qu'on introduit la définition suivante.

Définition 1.3.2 *Un quasi-groupe abélien profini simplicial cosimplicial est un objet cosimplicial dans la catégorie des groupes profinis simpliciaux tel*

qu'en chaque codegré, toutes les codégénérescences sont des morphismes de groupe simplicial, et que toutes les cofaces sont des morphismes de groupes simpliciaux, à l'exception possible de d^0 . Un morphisme de tels objets est un morphisme d'espaces cosimpliciaux qui est un morphisme de groupes en tout degré simplicial et cosimplicial.

En d'autres termes, $\mathbb{F}_p^\bullet[f]$ est un épimorphisme de quasi-groupes abéliens profinis simpliciaux cosimpliciaux.

Si on montre que tout épimorphisme de quasi-groupes abéliens profinis simpliciaux cosimpliciaux est une fibration au sens de Reedy, on a démontré le théorème 1.3.1, d'après les remarques précédentes.

Proposition 1.3.3 *Tout épimorphisme de quasi-groupes abéliens profinis simpliciaux cosimpliciaux est une fibration au sens de Reedy.*

Démonstration de la proposition 1.3.3. Soit $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ un morphisme d'espaces profinis cosimpliciaux. Par définition, f^\bullet est une fibration si pour tout n , l'application induite $X^{n+1} \rightarrow M^n X \times_{M^n Y} Y^{n+1}$ est une fibration (voir [23, chapitre VII] ou [5] pour la définition de M^n). En l'occurrence, l'application induite est un morphisme de groupes abéliens simpliciaux, il s'agit donc de montrer que ce morphisme est un épimorphisme.

Une solution possible est d'oublier la topologie profinie, et d'utiliser [5, ch. X, 4.9 proposition, p. 277], qui montre que pour tout n , $X^{n+1} \rightarrow M^n X \times_{M^n Y} Y^{n+1}$ est un épimorphisme de groupes simpliciaux (en oubliant la topologie profinie).

Néanmoins, nous donnons une démonstration complète de la proposition 1.3.3 en appendice (voir C.6.1 p. 126).

En utilisant la propriété (théorème 1.2.2) du calcul homotopique de $\widehat{\mathcal{S}}$, on en déduit que si F est la fibre de f au-dessus d'un point de B , alors le morphisme canonique de RF dans la fibre de Rf est une équivalence d'homotopie simpliciale.

1.3.2 Remplacement par une fibration

Le fait que le calcul homotopique de $\widehat{\mathcal{S}}$ est simplicial et propre permet de donner une description agréable des fibrations de $\widehat{\mathcal{S}}$. Pour commencer, on montre comment remplacer un morphisme quelconque par une fibration.

Proposition 1.3.4 *Tout morphisme de $\widehat{\mathcal{S}}$ est à équivalence faible naturelle près une fibration entre espaces fibrants qui est limite filtrante de fibrations entre p -espaces finis.*

Démonstration. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de $\widehat{\mathcal{S}}$. On applique le lemme 1.1.6 p. 22. Le morphisme f est faiblement équivalent à $Rf : RX \longrightarrow RY$ qui est un morphisme entre espaces fibrants. De plus, Rf est limite inverse le long d'une catégorie cofiltrante I d'un diagramme $Rf(-) : X(-) \longrightarrow Y(-)$ morphismes entre p -espaces finis.

On va maintenant tirer partie de la structure simpliciale du calcul homotopique de $\widehat{\mathcal{S}}$. Pour chaque objet i de I , appliquons la technique usuelle pour transformer le morphisme $Rf(i) : X(i) \longrightarrow Y(i)$ entre espaces fibrants en une fibration $\tilde{R}f(i) : \tilde{X}(i) \longrightarrow Y(i)$ (voir C.3.4 p. 122). Par construction, ce procédé de remplacement d'un morphisme par une fibration commute aux limites, et $\lim \tilde{R}f(-) = \tilde{R}f$. \square

Lorsqu'on applique le processus 1.3.4 à une fibration, on obtient :

Théorème 1.3.5 *A équivalence faible près, toute fibration f de $\widehat{\mathcal{S}}$ est une fibration entre espaces fibrants, qui s'écrit comme limite filtrante d'un diagramme de fibrations $f(-)$ entre p -espaces finis. De plus, le morphisme naturel de la fibre de f vers la limite des fibres des $f(i)$ est une équivalence d'homotopie simpliciale.*

Démonstration. Le premier point est une conséquence directe de la proposition 1.3.4. Le second point résulte de la proposition 1.3.1. \square

1.4 La suite spectrale de Serre dans $\widehat{\mathcal{S}}$

Introduction

Dans cette section, on construit, suivant la méthode de A. Dress [12], la suite spectrale de Serre d'une fibration dans $\widehat{\mathcal{S}}$. L'idée d'utiliser la construction de A. Dress est naturelle, et apparaît déjà dans [8, 1.1.3, p. 13].

Cette suite spectrale sera utilisée dans la suite pour établir le théorème de convergence forte de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore dans le cadre profini (3.1.3 p. 50).

1.4.1 Construction de Dress dans \mathcal{S}

Nous commençons par rappeler brièvement la construction de Dress dans \mathcal{S} et ses propriétés en suivant l'article original de A. Dress [12].

Soit $f : E \longrightarrow B$ un morphisme de \mathcal{S} . On considère l'ensemble $K_{\ell,q}(f)$ des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \Delta[\ell] \times \Delta[q] & \longrightarrow & E \\ \downarrow pr_1 & & \downarrow f \\ \Delta[\ell] & \longrightarrow & X \end{array} \quad (1.11)$$

où pr_1 désigne la projection sur le premier facteur. La structure d'espace cosimplicial de $\Delta[\bullet]$ induit une structure d'ensemble bisimplicial sur $K_{\bullet,\bullet}(f)$.

Remarque 1.4.1 *Un bref moment de réflexion montre que l'ensemble simplicial $K_{\ell,\bullet}(f)$ est obtenu par le carré cartésien suivant :*

$$\begin{array}{ccc} K_{\ell,\bullet}(f) & \longrightarrow & \mathbf{hom}(\Delta[\ell], E) \\ \downarrow & & \downarrow \mathbf{hom}(\Delta[\ell], f) \\ B_\ell & \longrightarrow & \mathbf{hom}(\Delta[\ell], B) \end{array} \quad (1.12)$$

L'espace vectoriel bisimplicial $\mathbb{F}_p[K_{\bullet,\bullet}(f)]$ mène par dualisation puis double normalisation à un bicomplexe et donc à deux suites spectrales co-homologiques du premier quadrant.

Avertissement. *Dans toute la suite de cette section, et uniquement dans cette section, la notation DV désigne le dual algébrique d'un espace vectoriel V .*

La première suite spectrale a pour deuxième terme

$${}^I E_2^{\ell,q} = H^\ell H^q D\mathbb{F}_p[K_{\bullet,\bullet}(f)] \quad .$$

La seconde suite spectrale a pour deuxième terme

$${}^{II} E_2^{\ell,q} = H^q H^\ell D\mathbb{F}_p[K_{\bullet,\bullet}(f)] \quad .$$

Il n'est pas difficile de voir que $K_{\bullet,0}(f)$ s'identifie naturellement à E . Plus généralement, pour tout entier q , la projection de $\Delta[q]$ sur son premier sommet induit une équivalence d'homotopie entre $K_{\bullet,q}(f)$ et $K_{\bullet,0}(f)$. Finalement, on obtient que $K_{\bullet,\bullet}(f)$ est 'horizontalement' homotope au diagramme simplicial constant égal à E . Ceci montre que pour tout morphisme f , le premier terme de la seconde suite spectrale est en tout degré q l'homologie du complexe

$$\cdots \xrightarrow{Id} H^\ell E \xrightarrow{0} H^\ell E \xrightarrow{Id} H^\ell E \xrightarrow{0} H^\ell E$$

qui est nulle sauf en degré $q = 0$ où elle vaut $H^\ell E$. On en déduit immédiatement que la seconde suite spectrale converge également vers $H^* E$.

Lorsque f est une fibration, le second terme de la première suite spectrale admet l'interprétation habituelle. En effet, un simplexe de $\Delta[\ell] \rightarrow B$ étant fixé, l'ensemble des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \Delta[\ell] \times \Delta[q] & \longrightarrow & E \\ \downarrow pr_1 & & \downarrow f \\ \Delta[\ell] & \longrightarrow & X \end{array} \quad (1.13)$$

s'identifie, lorsque q varie, au sous-espace de E qui est image réciproque de $\Delta[\ell]$ par f . Par conséquent, l'espace $K_{\ell, \bullet}$ est la somme disjointe indexée par les ℓ -simplexes $\Delta[\ell] \rightarrow B$ des images réciproques de $\Delta[\ell]$ par f .

Notons $T_q(\Delta[n] \rightarrow B)$ le groupe $H^q f^{-1}(\Delta[n])$. Le foncteur $T_q(-)$ de la catégorie des simplexes de B dans la catégorie des groupes abéliens transforme tous les morphismes en isomorphismes, et fournit donc (une fois rendu contravariant) un système de coefficients locaux sur B au sens usuel (voir [12]). Le fait que T_q transforme tous les morphismes de la catégorie des simplexes de B en isomorphismes de groupes abéliens est un corollaire de la propriété du calcul homotopique de \mathcal{S} (voir [23, II.8]).

On obtient que ${}^I E_2^{\ell, q} = H^\ell H^q \mathbb{F}_p[K_{\bullet, \bullet}(f)]$ est en degré q l'homologie du complexe

$$\cdots \rightrightarrows \bigoplus_{\Delta[1] \rightarrow B} H^q f^{-1}(\Delta[1]) \rightrightarrows \bigoplus_{\Delta[0] \rightarrow B} H^q f^{-1}(\Delta[0]) \quad (1.14)$$

qui n'est autre que le groupe de cohomologie de B à coefficients dans le système de coefficients locaux $T_q(-)$, *i.e.* la cohomologie de B à coefficients dans la fibre $H^\ell(B, H^q F)$.

C'est ainsi que la construction de Dress conduit à un avatar de la suite spectrale de Serre.

1.4.2 Construction de la suite spectrale de Serre dans $\hat{\mathcal{S}}$

On a vu précédemment comment remplacer naturellement tout morphisme f de $\hat{\mathcal{S}}$ (voir la proposition 1.3.4, p. 35) par une fibration telle que

- la fibration \tilde{f} est une fibration entre espaces fibrants,
- la fibration \tilde{f} est faiblement équivalente à f ,
- la fibration \tilde{f} est limite d'un diagramme indexé par une catégorie co-filtrante I de fibrations $\tilde{f}(-)$ entre p -espaces finis.

On a également montré que lorsque f est déjà une fibration, la fibre de \tilde{f} est simplicialement homotope à celle de f (théorème 1.3.5, p. 36).

Pour toute fibration f de $\hat{\mathcal{S}}$, on définit la construction de Dress de f comme l'ensemble bisimplicial $K_{\ell,q}(\tilde{f})$ des diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \Delta[\ell] \times \Delta[q] & \longrightarrow & E \\ \downarrow pr_1 & & \downarrow f \\ \Delta[\ell] & \longrightarrow & X \end{array} \quad (1.15)$$

La suite spectrale de Serre associée sera définie de la manière suivante. Au groupe abélien profini bisimplicial $\mathbb{F}_p[K_{\ell,q}(\tilde{f})]$, on peut appliquer le foncteur dual continu, ce qui mène à un bicomplexe et deux suites spectrales cohomologiques du premier quadrant.

Le point essentiel pour nous est que $\mathbb{F}_p[K_{\ell,q}(\tilde{f})]$ est la limite de $\mathbb{F}_p[K_{\ell,q}(\tilde{f}(-))]$ le long de I , comme le montre la remarque 1.4.1.

On a pour chaque i dans I , on a la suite spectrale de Serre définie au paragraphe précédent

$$E_2^{\ell,q}(i) = H^\ell H^q \mathbb{F}_p[K_{\ell,q}(f(i))] = H^\ell(B(i), H^q F(i)) \Rightarrow H^{p+q} E(i) \quad .$$

Par naturalité, lorsque i décrit la catégorie d'indexation I , ces suites spectrales s'organisent en un système filtrant de suites spectrales $\{E_r^{\ell,q}(-)\}_r$ indexé par I .

Par définition, l'espace profini bisimplicial $\mathbb{F}_p[K_{\bullet,\bullet}(f)]$ est la limite du I -diagramme d'espaces profinis bisimpliciaux $\mathbb{F}_p[K_{\bullet,\bullet}(f(-))]$.

La conséquence des remarques précédentes et de l'exactitude des colimites filtrantes de groupes abéliens est que la colimite sur I des suites spectrales $\{E_r^{\ell,q}(-)\}_r$ est la suite spectrale de Serre qu'on a définie. Par conséquent, le second terme de la suite spectrale de Serre est la colimite du système filtrant $E_2^{\ell,q}(-) = H^\ell(B(-), H^q F(-))$ qui est par définition $H^\ell(B, H^q F)$ (voir C.4.3).

On a donc montré :

Proposition 1.4.2 *La première suite spectrale associée à la construction de Dress dans $\hat{\mathcal{S}}$ est une suite spectrale cohomologique du premier quadrant*

$$E_2^{\ell,q} = H^\ell(B, H^q F) \Rightarrow H^{\ell+q} E \quad .$$

Chapitre 2

La suite spectrale d'Eilenberg-Moore

Introduction

On construit dans ce chapitre la suite spectrale d'Eilenberg-Moore d'un carré fibré homotopique dans le cadre de $\widehat{\mathcal{S}}$. Le point de vue que nous adoptons est de produire cette suite spectrale *via* une construction géométrique : la construction cobarre géométrique de Rector. Comme cela est fait dans [10], il est possible de montrer directement, en reprenant l'argumentation de Rector, que la suite spectrale ainsi construite est munie de toutes les propriétés usuelles que possède la suite spectrale d'Eilenberg-Moore dans \mathcal{S} . Dans ce mémoire, on s'est contenté de dégager ces propriétés en approximant cette suite spectrale comme colimite filtrante de suites spectrales pour des carrés fibrés entre p -espaces finis. Une conséquence de cette description est que cette suite spectrale d'Eilenberg-Moore est toujours convergente au sens naïf. L'approximation évoquée résulte de la description des fibrations qui a été faite dans le chapitre précédent (voir 1.3.5 p. 36).

2.1 Construction de la suite spectrale

2.1.1 Préliminaire homotopique

La théorie des limites homotopiques [16, § XIV] est particulièrement simple lorsqu'on considère un diagramme \mathcal{P} de la forme :

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ & \downarrow f & \\ X & \xrightarrow{g} & B \end{array} \quad (2.1)$$

Définition 2.1.1 *La limite homotopique du diagramme \mathcal{P} (2.1) est appelée produit fibré homotopique de ce diagramme.*

La théorie des limites homotopiques de tels diagrammes dans un calcul homotopique quelconque est examinée de manière systématique dans [15, § 10]. La théorie se simplifie considérablement dans le cas où le calcul homotopique est propre, comme c'est le cas dans la situation du calcul homotopique de $\widehat{\mathcal{S}}$. En effet, la limite homotopique du diagramme \mathcal{P} (2.1) est obtenue en prenant le produit fibré (au sens catégorique) de n'importe quel diagramme faiblement équivalent à \mathcal{P} (2.1), dans lequel l'un des morphismes est une fibration. En particulier, si dans le diagramme \mathcal{P} (2.1), l'un des morphismes f ou g est une fibration, le produit fibré homotopique du diagramme est obtenu comme le produit fibré catégorique de ce diagramme.

Nous allons indiquer un procédé *ad hoc* pour construire la limite homotopique du diagramme \mathcal{P} (2.1) sous une forme particulièrement maniable. Considérons à nouveau le diagramme \mathcal{P} (2.1). La catégorie d'indexation de ce diagramme est admissible C.2.4. On applique la proposition 1.1.6 p. 22, qui fournit *fonctoriellement* un diagramme faiblement équivalent \mathcal{P}' :

$$\begin{array}{ccc} & RE & \\ & \downarrow Rf & \\ RX & \xrightarrow{Rg} & RB \end{array} \quad (2.2)$$

ayant la propriété d'être la limite d'un diagramme filtrant indexé par une catégorie cofiltrante I de diagrammes $\mathcal{P}'(i)$:

$$\begin{array}{ccc} & E'(i) & \\ & \downarrow f'(i) & \\ X(i) & \xrightarrow{g'(i)} & B(i) \end{array} \quad (2.3)$$

où pour tout i dans I , les espaces $B(i)$, $E'(i)$ et $X(i)$ sont des p -espaces finis. On applique alors la proposition C.3.4, valable car le calcul homotopique de $\hat{\mathcal{S}}$ est simplicial, et on remplace fonctoriellement chaque $f'(i) : E'(i) \rightarrow B'(i)$ en une fibration $\tilde{f}(i) : \tilde{E}(i) \rightarrow B(i)$. On applique également le procédé à f , qu'on remplace par une fibration \tilde{f} .

On obtient pour tout i dans I des diagrammes $\tilde{\mathcal{P}}(i)$:

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{E}(i) & \\ & \downarrow \tilde{f}(i) & \\ X(i) & \xrightarrow{g(i)} & B(i) \end{array} \quad (2.4)$$

et un diagramme $\tilde{\mathcal{P}}$

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{E} & \\ & \downarrow \tilde{f} & \\ RX & \xrightarrow{g} & B \end{array} \quad (2.5)$$

Par naturalité du processus de remplacement d'un morphisme entre espace fibrants par une fibration, le diagramme $\tilde{\mathcal{P}}(-)$ est un pro-objet indexé par I dans les diagrammes du type (2.1). D'autre part, le procédé de remplacement d'un morphisme par une fibration commute aux limites. On a donc que $\lim \tilde{f}(-) = \tilde{f}$ et $\lim \tilde{\mathcal{P}}(-) = \tilde{\mathcal{P}}$.

Soit $P(i)$ la limite de $\tilde{\mathcal{P}}(i)$ et soit P la limite de $\tilde{\mathcal{P}}$. Par commutation des limites entre elles, $\lim P(-) = P$. Comme on l'a remarqué précédemment, l'espace profini P est la limite homotopique du diagramme de départ \mathcal{P} , et chaque $P(i)$ est la limite homotopique du diagramme $\tilde{\mathcal{P}}(i)$.

Définition 2.1.2 *Le procédé qui consiste à remplacer le diagramme \mathcal{P} (2.1) par le diagramme $\tilde{\mathcal{P}}$ (2.5) est appelé mise sous forme canonique. On appelle produit fibré homotopique du diagramme \mathcal{P} (2.1) la limite P du diagramme $\tilde{\mathcal{P}}$.*

Définition 2.1.3 *Lorsque X est un point dans le diagramme (2.1), le produit fibré homotopique du diagramme est appelée fibre homotopique de f au dessus de $g : * \rightarrow B$. Notons que comme le procédé employé 'préserve les points de bases', et ne modifie essentiellement pas g (qui est juste remplacée par sa pro- p -completion), l'espace de lacets défini ci-dessus est bien*

l'espace de lacets attendu, i.e. la limite homotopique pointée du diagramme $ \longrightarrow X \longleftarrow *$.*

*Lorsque X et E sont tous deux des points, le produit fibré homotopique est appelé espace de lacets de B pointé en $g : * \longrightarrow B$. On note ΩB cet espace de lacets.*

Avertissement. *Dans toute la suite on fera l'hypothèse que le diagramme \mathcal{P} (2.1) est sous sa forme canonique $\tilde{\mathcal{P}}$ (2.5).*

2.1.2 Quelques définitions

Définition 2.1.4 *Soit S un ensemble. On définit :*

$$\mathbb{F}_p[S] = \bigoplus_{m \in S} \mathbb{F}_p \quad .$$

Soit S un ensemble profini, limite d'un diagramme $S(-)$ d'ensembles finis. On définit :

$$\mathbb{F}_p[S] = \lim \mathbb{F}_p[S(-)].$$

Remarque 2.1.5 *On utilise la même notation $\mathbb{F}_p[-]$ pour des foncteurs de source la catégorie des ensembles ou des ensembles profinis. Celui de ces deux foncteurs qui est sous-entendu par cette notation sera toujours clair relativement au contexte.*

Le lemme suivant est une conséquence facile des définitions.

Lemme 2.1.6 *Pour tout ensemble profini S , l'ensemble $\mathbb{F}_p[S]$ est naturellement profini, et cette structure profinie ne dépend pas du choix du diagramme $S(-)$ qui représente S . De plus le foncteur $\mathbb{F}_p[-]$ est adjoint à gauche du foncteur d'oubli de la catégorie des \mathbb{F}_p -espaces vectoriels profinis dans la catégorie des ensembles profinis.*

Remarque 2.1.7 *Les deux foncteurs qu'on vient de définir s'étendent simplicialement en des foncteurs de \mathcal{S} et $\hat{\mathcal{S}}$ respectivement. De même, l'adjonction donnée par le lemme 2.1.6 s'étend au niveau simplicial.*

Pour tout \mathbb{F}_p -espace vectoriel profini V , on peut former le *dual profini* de V , qui est le \mathbb{F}_p -espace vectoriel des formes linéaires continues de V dans \mathbb{F}_p . On note DV le dual profini d'un \mathbb{F}_p -espace vectoriel profini V .

Définition 2.1.8 *Soit V^\bullet un \mathbb{F}_p -espace vectoriel profini simplicial. On définit les groupes de cohomotopie $\pi^\bullet V^\bullet$ de V^\bullet comme les groupes de cohomologie du complexe associé au \mathbb{F}_p -espace vectoriel cosimplicial DV^\bullet .*

Lemme 2.1.9 *Soit X un espace profini. L'adjonction du lemme 2.1.6 induit un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels gradués*

$$H^*X \cong \pi^* \mathbb{F}_p[X] \quad .$$

2.1.3 Construction cobarre géométrique

Au diagramme (2.1), on peut associer un espace profini cosimplicial $C(f, g)^\bullet$: la construction cobarre géométrique de D. Rector [46]. On définit $C(f, g)^\bullet$ comme suit. En degré cosimplicial n ,

$$C(f, g)^n = X \times (B^{\times n}) \times E \quad .$$

Les codégénérescences s^i et les cofaces d^i sont définies par :

$$\begin{cases} d^0(x, b_1, \dots, b_n, e) = (x, g(x), b_1, \dots, b_n, e) \\ d^{n+1}(x, b_1, \dots, b_n, e) = (x, b_1, \dots, b_n, f(e), e) \\ d^i(x, b_1, \dots, b_n, e) = (x, b_1, \dots, b_i, b_i, \dots, b_n, e) & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ s^i(x, b_1, \dots, b_n, e) = (x, b_1, \dots, b_i, b_{i+2}, \dots, b_n, e) & \text{si } 0 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

2.1.4 Construction de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore

On considère un produit fibré homotopique \mathcal{P} mis sous sa forme canonique (voir la définition 2.1.2, p. 43) :

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{g} & B \end{array} \quad (2.6)$$

Soit $C(f, g)^\bullet$ la construction cobarre géométrique associée. On forme l'espace vectoriel profini simplicial cosimplicial $\mathbb{F}_p[C(f, g)^\bullet]$. La tour totale associée $\{\text{Tot}_\alpha \mathbb{F}_p[C(f, g)^\bullet]\}_\alpha$ est une tour de \mathbb{F}_p -espaces vectoriels simpliciaux qui induit une suite spectrale en cohomotopie.

Cette suite spectrale est par définition la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du produit fibré homotopique (2.6).

2.1.5 Interprétation de la suite spectrale en terme de colimites

Le produit fibré homotopique (2.6) étant sous forme canonique, il se présente comme limite d'un pro-objet à valeurs dans les produits fibrés homotopiques $\mathcal{P}(-)$ entre p -espaces finis, indexé par une catégorie cofiltrante

I . En particulier, pour chaque i dans I , on dispose d'une suite spectrale d'Eilenberg-Moore du produit fibré homotopique $\mathcal{P}(i)$ qui converge fortement, grâce aux hypothèses de p -finitude, vers la cohomologie de $P(i)$ (cf théorème 1.2.10, p. 32).

La limite du pro-objet indexé par I des constructions cobarres géométriques $C(f(-), g(-))^\bullet$ est la construction cobarre géométrique $C(f, g)^\bullet$. La définition du foncteur $\mathbb{F}_p[-]$ montre que $\mathbb{F}_p[C(f, g)^\bullet]$ est la limite des $\mathbb{F}_p[C(f(-), g(-))^\bullet]$. Comme les foncteurs Tot_α commutent aux limites, la limite sur I du pro-objet $\{\text{Tot}_\alpha \mathbb{F}_p[C(f(i), g(i))^\bullet]\}_{i \in I, \alpha \in \mathbb{N}}$ s'identifie à la tour $\{\text{Tot}_\alpha \mathbb{F}_p[C(f, g)^\bullet]\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$.

Finalement, la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de \mathcal{P} s'identifie à la colimite sur i des suites spectrales d'Eilenberg-Moore usuelle des $\mathcal{P}(i)$.

En particulier, on obtient immédiatement que, comme colimite de suites spectrales qui convergent fortement, la suite spectrale d'Eilenberg-Moore est convergente. De plus, les colimites filtrantes sont exactes et commutent aux produits tensoriels, et c'est pour cela que l'essentiel de la structure usuelle de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore usuelle se transporte sur la suite spectrale d'Eilenberg-Moore pour un produit fibré homotopique d'espaces profinis. On obtient donc :

Proposition 2.1.10 *La suite spectrale d'Eilenberg-Moore d'un carré fibré converge toujours au sens naïf vers la cohomologie du produit fibré homotopique, i.e. l'aboutissement de la suite spectrale est le gradué associé à une filtration exhaustive de la cohomologie du produit fibré homotopique.*

2.2 Propriétés de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore

Les remarque précédentes ont fait apparaître que la suite spectrale d'Eilenberg-Moore pour les espaces profinis possède l'essentiel des propriétés de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore usuelle. La suite spectrale d'Eilenberg-Moore pour un carré fibré homotopique (2.6) dans $\widehat{\mathcal{S}}$ a les propriétés suivantes.

Naturalité.

La suite spectrale d'Eilenberg-Moore profinie est une suite spectrale naturelle $(E_r^{s,t}, d_r^{s,t})$, $s \leq 0, t \geq 0$ (du second quadrant), qui converge vers la cohomologie continue de P .

Bidegré des différentielles

$$d_r^{s,t} : E_r^{s,t} \longrightarrow E_r^{s+r,t-r+1}$$

Structure algébrique

1. $E_r^{s,*}$ est un module instable, et $d_r^{s,*}$ est \mathcal{A}_p -linéaire de degré $1 - r$.
2. $E_r^{s,t}$ est munie d'une structure d'algèbre bigraduée pour laquelle $d_r^{s,t}$ est une dérivation.
3. $E_2^{s,t} \cong \text{Tor}_{H^*B}^{s,t}(H^*E, H^*X)$

Cible

1. la suite spectrale converge vers le gradué associé à une filtration \mathcal{F} croissante et exhaustive de H^*P :

$$\dots \supset F_s \supset F_{s-1} \supset \dots F_1 \supset F_0 \supset \{0\}$$

qui est une filtration d'algèbres. Les F_s sont également des sous-modules instables de la cohomologie continue de la fibre homotopique de f .

2. La structure d'algèbre de l'aboutissement coïncide avec celle induite sur le gradué associé à la filtration \mathcal{F}
3. $E_\infty^{s,*} = \Sigma^s(F_s/F_{s-1})$
4. la formule de Cartan est vérifiée mais la suite spectrale n'est pas une suite spectrale d'algèbres instables.
5. Si l'on prend comme terme $E_1^{s,t}$ la construction barrée dont l'homologie est $E_2^{s,t}$, les structures de module et d'algèbre naturelles sur le terme $E_1^{s,t}$ induisent celles dont est munie le terme $E_2^{s,t}$. Les structures naturelles en question sont celles qui proviennent de la formule de Cartan pour la structure de module, et du produit des battages (shuffle product) pour la structure d'algèbre.

Chapitre 3

La convergence forte de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore

Introduction

Cette section est dédiée à la démonstration d'un théorème qui précise dans quelle situation on obtient la convergence forte de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore définie au chapitre 2. L'énoncé du théorème de convergence forte et la technique utilisée pour le démontrer sont tout à fait analogues à celles utilisées par W. Dwyer [14] dans le cas de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore usuelle. Les notes d'un cours de F. Morel [41] nous ont été très précieuses.

On s'est contenté de traiter le cas où la base du carré fibré est connexe. Il est possible, suivant le travail de B. Shipley [49] [50], d'obtenir de nombreux énoncés qui raffinent l'énoncé de convergence forte au cas où par exemple, la base n'est pas nécessairement connexe.

Notons que la démonstration donnée ici se suffit à elle-même, *i.e.* n'utilise aucun résultats précédent de ce travail, ni ne repose sur les différents travaux [4, 14, 49, 50].

3.1 Convergence forte

Commençons par rappeler la notion de convergence forte.

Définition 3.1.1 *On dit que la suite spectrale converge fortement vers H^*P si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *Pour tout (s, t) , $E_r^{s,t} = E_\infty^{s,t}$ dès que r est assez grand.*

2. $\{E_r^{s,t}, s+t=n\}$ est l'ensemble des sous-quotients d'une filtration finie du n -ième groupe de cohomologie continue de la fibre homotopique.

Proposition 3.1.2 *La suite spectrale d'Eilenberg-Moore converge fortement vers H^*P si et seulement si pour tout n , l'augmentation canonique*

$$\{\pi^n \text{Tot}_\alpha \mathbb{F}_p[c(f, g)^\bullet]\}_\alpha \longrightarrow H^*P$$

est un pro-isomorphisme.

Le théorème de convergence forte

On considère un produit fibré homotopique (voir 2.1.1, p. 42) :

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{g} & B \end{array} \quad (3.1)$$

Théorème 3.1.3 *On suppose que B est connexe (C.4.4 p. 124). On considère les deux conditions suivantes :*

1. *La suite spectrale d'Eilenberg-Moore associée à (3.1) converge fortement vers H^*P .*
2. *L'action d'holonomie de $f : E \longrightarrow B$ est nilpotente pour tout choix de point de base dans B .*

*Si $X = *$, alors les conditions 1 et 2 sont équivalentes. En général, lorsque X n'est pas un point, la condition 2 implique la condition 1.*

La démonstration du théorème de convergence forte qui occupe la fin du chapitre est calquée sur celle de l'article original de W. G. Dwyer [14].

Pour commencer, on étudie la fibration d'espaces cosimpliciaux associée à la construction cobarre géométrique. On en déduit l'existence d'une suite spectrale auxiliaire qui est l'outil principal dans la démonstration du théorème de convergence forte. On utilise aussi une version du théorème de comparaison de suites spectrales de Zeeman et certaines propriétés algébriques des systèmes de coefficients locaux nilpotents. Une fois tous ces outils en place, le théorème de convergence forte est établi.

3.2 Données auxilliaires associées à la construction cobarre géométrique

3.2.1 Une fibration d'espaces cosimpliciaux

Pour tout espace profini X , on note \underline{X} l'espace profini cosimplicial constant égal à X .

On a une suite fibrée d'espaces profinis cosimpliciaux :

$$C(f, *) \longrightarrow C(f, g) \longrightarrow \underline{X} \quad .$$

Cette suite fibrée cosimpliciale est augmentée par la suite fibrée :

$$F \longrightarrow P \longrightarrow X \quad .$$

De ce fait, après application de Tot_α , on obtient pour tout entier α des suites fibrées :

$$\text{Tot}_\alpha C(f, *)^\bullet \longrightarrow \text{Tot}_\alpha C(f, g)^\bullet \longrightarrow X = \text{Tot}_\alpha \underline{X} \quad .$$

Chacune de ces suites fibrées d'espaces profinis est augmentée par la suite fibrée

$$F \longrightarrow P \longrightarrow X \quad .$$

3.2.2 Un système de coefficients locaux sur B

Considérons la suite fibrée :

$$C(f, *) \longrightarrow C(f, g) \longrightarrow \underline{X} \quad .$$

Soit $\sigma : \Delta[n] \longrightarrow X$ un simplexe de X . L'espace cosimplicial constant (discret) $\underline{\Delta[n]}$ est contractile. Soit F_σ le produit fibré de $\Delta[n]$ et $C(f, g)$ le long de σ et de la fibration $C(f, g) \longrightarrow \underline{X}$.

$$\begin{array}{ccccc} C(f, *) & \xrightarrow{\simeq} & F_\sigma & \longrightarrow & C(f, g) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ * & \xrightarrow{\simeq} & \underline{\Delta[n]} & \xrightarrow{\sigma} & \underline{X} \end{array} \quad (3.2)$$

Fixons un entier α . Par propreté du calcul homotopique des espaces cosimpliciaux (voir 1.2, p. 25), l'espace profini F_σ est faiblement équivalent à $C(f, *)$, qui est la fibre de $C(f, g) \longrightarrow \underline{X}$. Par conséquent, le foncteur de la

catégorie des simplexes de X dans les groupes abéliens qui à un simplexe σ de X fait correspondre le groupe $\pi^n \text{Tot}_\alpha(\mathbb{F}_p[F_\sigma])$ est un bon candidat pour être un système de coefficients locaux sur X .

On va montrer :

Proposition 3.2.1 *Pour tout couple (n, α) d'entiers,*

$$\sigma \longmapsto \pi^n \text{Tot}_\alpha(\mathbb{F}_p[F_\sigma])$$

est un système de coefficients locaux sur X . On notera (abusivement) la cohomologie de X à coefficients dans ce système

$$H^*(X, \pi^n \text{Tot}_\alpha(\mathbb{F}_p[C(f, *)])) \quad .$$

Démonstration. La définition des systèmes de coefficients locaux est donnée en C.4.3, p. 124.

Rappelons que l'on considère un diagramme

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{g} & B \end{array} \quad (3.3)$$

qui est par construction la limite filtrante d'un diagramme de produits fibrés homotopiques

$$\begin{array}{ccc} P(-) & \longrightarrow & E(-) \\ \downarrow & & \downarrow f(-) \\ X(-) & \xrightarrow{g(-)} & B(-) \end{array} \quad (3.4)$$

indexé par une catégorie filtrante I où tous les espaces sont p -finis (voir 2.1.1) et $f(-)$ est un I -diagramme de fibrations.

De même la suite fibrée d'espaces profinis cosimpliciaux :

$$C(f, *) \longrightarrow C(f, g) \longrightarrow \underline{X}$$

est limite du I -diagramme de suites fibrées

$$C(f(-), *) \longrightarrow C(f(-), g(-)) \longrightarrow \underline{X(-)} \quad .$$

Soient i un objet de I et $\sigma : \Delta[n] \longrightarrow X(i)$ un simplexe de $X(i)$. Définissons $F_\sigma(i)$ par le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} F_\sigma(i) & \longrightarrow & C(f(i), g(i)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta[n] & \xrightarrow{\sigma} & X(i) \end{array} \quad (3.5)$$

Les considérations précédentes montrent que

$$\sigma \longmapsto \pi^n \text{Tot}_\alpha(\mathbb{F}_p[F_\sigma(i)])$$

est un système de coefficients locaux sur $X(i)$ au sens ordinaire (*i.e.* dans \mathcal{S} : l'espace profini $X(i)$ est p -fini). Ceci achève la démonstration. \square

Définition 3.2.2 *Soit π un groupe (éventuellement un groupe profini). Un π -module M est dit nilpotent si M admet une filtration finie par des π -sous-modules dont les sous-quotients successifs sont munis d'une action triviale de π . La longueur de la plus petite telle filtration est l'ordre de nilpotence de M .*

Le système de coefficients locaux qu'on vient d'introduire possède la propriété remarquable suivante.

Proposition 3.2.3 *Pour tout entier n , et pour tout entier α le système de coefficients locaux $\pi^n \text{Tot}_\alpha(\mathbb{F}_p[F_\sigma])$ est nilpotent d'ordre au plus α .*

Démonstration. On procède par récurrence sur α . On va démontrer la propriété pour les espaces p -finis. Le résultat général s'en suivra par passage à la colimite filtrante.

Soit $N^\alpha \mathbb{F}_p[F_\sigma]$ le noyau du morphisme canonique

$$s = \prod_{i=0}^n s^i : \mathbb{F}_p[F_\sigma]^{n+1} \longrightarrow M^n F_\sigma$$

(voir le début de la démonstration de C.6.2, p. 126 pour les définitions).

On a la suite exacte suivante de groupes abéliens profinis simpliciaux (d'après [5, appendice])

$$\Omega^\alpha N^\alpha \mathbb{F}_p[F_\sigma] \longrightarrow \text{Tot}_\alpha(\mathbb{F}_p[F_\sigma]) \longrightarrow \text{Tot}_{\alpha-1}(\mathbb{F}_p[F_\sigma]) \quad .$$

Cette suite exacte induit une suite exacte longue en cohomotopie. Ceci, conjugué au lemme suivant, fournit le pas de récurrence. L'initialisation de la récurrence est sans difficultés.

Lemme 3.2.4 *Le foncteur $\sigma \mapsto \pi^n N^\alpha \mathbb{F}_p[F_\sigma]$ est un système de coefficients locaux trivial sur B .*

□

3.2.3 Une tour de suites spectrales auxilliaires

Proposition 3.2.5 *Il existe pour tout entier α des suites spectrales :*

$$E_2^{s,t}(\alpha) = H^s(X, \pi^t \text{Tot}_\alpha(\mathbb{F}_p[C(f, *)^\bullet])) \Rightarrow \pi^{s+t}(\text{Tot}_\alpha(\mathbb{F}_p[C(f, g)^\bullet]))$$

telle que :

- $\{E_r^{s,t}(\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ est une tour de suites spectrales,
- cette tour est augmentée par la suite spectrale de Serre de

$$F \longrightarrow P \longrightarrow X \quad ,$$

- l'augmentation est compatible à l'action du groupe fondamental de X .

Démonstration. La suite spectrale spectrale en question est une suite spectrale de Serre-Atiyah-Hirzebruch associée à la fibration

$$C(f, *) \longrightarrow C(f, g) \longrightarrow \underline{X} \quad .$$

dans la théorie cohomologique $\pi^\bullet \text{Tot}_\alpha \mathbb{F}_p[-]$.

Soyons plus précis. La fibration d'espaces profinis cosimpliciaux $\phi : C(f, *) \longrightarrow C(f, g) \longrightarrow \underline{X}$ fournit en tout degré cosimplicial s une fibration $C(f, *)^s \longrightarrow C(f, g)^s \longrightarrow X$ de $\widehat{\mathcal{S}}$.

Comme on l'a dit précédemment, le diagramme (3.1) est limite sur une catégorie cofiltrante I de diagrammes entre p -espaces finis (voir 2.1.1 p. 42) et la fibration $\phi : C(f, *)^s \longrightarrow C(f, g)^s \longrightarrow X$ est limite de fibrations $\phi(i)^s : C(f(i), *)^s \longrightarrow C(f(i), g(i))^s \longrightarrow X(i)$.

Par naturalité de la construction de Dress (voir 1.4.1 p. 36), on obtient pour tout i de I un diagramme cosimplicial dans les espaces profinis bisimpliciaux $K_{\bullet, \bullet}(\phi(i)^\bullet)$.

Le \mathbb{F}_p -espace vectoriel profini cosimplicial bisimplicial $\mathbb{F}_p[K_{\bullet, \bullet}(\phi^\bullet)]$ est limite le long de I des \mathbb{F}_p -espaces vectoriels profinis cosimpliciaux bisimpliciaux $\mathbb{F}_p[K_{\bullet, \bullet}(\phi(i)^\bullet)]$.

Pour tout entier α , on obtient par application du foncteur Tot_α un \mathbb{F}_p -espace vectoriel profini bisimplicial $\text{Tot}_\alpha \mathbb{F}_p[K_{\bullet, \bullet}(\phi^\bullet)]$ qui est limite (le foncteur Tot_α commute aux limites) des \mathbb{F}_p -espaces vectoriels bisimpliciaux

$\text{Tot}_\alpha \mathbb{F}_p[K_{\bullet, \bullet}(\phi(i)^\bullet)]$. Par application du dual continu et normalisation, on obtient ainsi un bicomplexe et deux suites spectrales cohomologiques.

Comme dans la section 1.4.1 p. 36, on va identifier l'aboutissement commun de ces deux suites spectrales grâce au deuxième terme de la deuxième suite spectrale, et calculer directement le deuxième terme de la première suite spectrale qui est la suite spectrale auxiliaire recherchée.

Comme on l'a vu dans la section 1.4.1 p. 36, on a pour chaque entier s et chaque entier s , une équivalence d'homotopie entre $K_{s, \bullet}(\phi(i)^s)$ et $K_{0, \bullet}(\phi(i)^s)$ qui n'est autre que $C(f, g)^s$. Ainsi, toujours suivant 1.4.1, l'espace $K_{\bullet, \bullet}(\phi(i)^s)$ est naturellement homotope à l'ensemble cosimplicial bisimplicial constant (dans la direction bisimpliciale 'horizontale') égal à $C(f(i), g(i))^\bullet$. Donc, le foncteur Tot_α étant un foncteur homotopique, la deuxième suite spectrale dégénère au deuxième terme. Le deuxième terme de la seconde suite spectrale est nul pour $q \neq 0$ et vaut pour $q = 0$

$${}^H E_2^{s, q}(\alpha)(i) = \pi^s(\text{Tot}_\alpha(\mathbb{F}_p[C(f, g)^\bullet])).$$

Ceci règle la question de l'aboutissement de la suite spectrale.

Il reste à calculer son deuxième terme. Ceci se déduit également de l'identification du deuxième terme dans le cas usuel (voir encore 1.4.1 p. 36) et du fait que pour un ensemble fini simplicial, le foncteur $\text{Tot}_\alpha \mathbb{F}_p[-]$ est un foncteur homotopique qui transforme les sommes finies d'espaces en sommes de groupes abéliens simpliciaux (c'est formel).

On obtient donc le deuxième terme voulu pour la suite spectrale pour tout i dans I , *i.e.*

$$E_2^{s, t}(\alpha)(i) = H^s(X(i), \pi^t \text{Tot}_\alpha \mathbb{F}_p[C(f(i), *)^\bullet]) \quad .$$

En passant à la colimite filtrante sur I , on obtient bien le deuxième terme désiré pour la première suite spectrale.

On obtient le résultat voulu pour tout entier α . La naturalité des constructions assure que lorsque α varie, on obtient *une tour de suites spectrales*. Le reste des propriétés attendues dans la proposition 3.2.5 de la suite spectrale ne sont pas plus difficiles.

En conclusion, on a bien construit une tour naturelle de suites spectrales

$$\{E_2^{s, t}(\alpha) = H^s(X, \pi^t \text{Tot}_\alpha \mathbb{F}_p[C(f, *)^\bullet])\}_{\alpha \in \mathbb{N}} \Rightarrow \{\pi^{s+t} \text{Tot}_\alpha \mathbb{F}_p[C(f, g)^\bullet]\}_{\alpha \in \mathbb{N}} \quad .$$

□

3.3 Quelques lemmes algébriques

3.3.1 Propriétés des systèmes de coefficients locaux nilpotents

La proposition suivante découle d'une version 'pro' d'une proposition bien connue.

Proposition 3.3.1 *Soit X un espace profini connexe et fibrant. Soit π le groupe fondamental de X . Soit $f : M \rightarrow N$ un morphisme de π -modules, où M et N ne sont pas nécessairement discrets.*

- Si $H^0(X, f)$ est un isomorphisme, il en est de même pour $H^0(\pi, f)$.
- Si $H^0(X, f)$ est un isomorphisme et si $H^1(X, f)$ est un monomorphisme, alors il est de même pour $H^0(\pi, f)$ et $H^1(\pi, f)$

Nous aurons également besoin de la proposition suivante.

Proposition 3.3.2 *Soit $f_s : \{M_s\}_{s \in \mathbb{N}} \rightarrow \{N_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ un morphisme entre deux tours de π -modules discrets nilpotents. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. le morphisme f est un pro-isomorphisme,
2. le morphisme $H^0(\pi, f_s)$ est un pro-isomorphisme et $H^1(\pi, f_s)$ un pro-monomorphisme.

Démonstration. On commence par lemme suivant.

Lemme 3.3.3 *Soit M_s une tour de π -modules nilpotents. Alors M_s est pro-triviale si et seulement si $H^0(\pi, M_s)$ est pro-triviale.*

Démonstration du lemme 3.3.3. Rappelons qu'une tour de groupes abéliens $\{M_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ est pro-triviale s'il pour tout entier n , il existe un entier $\ell(n) \geq n$ tel que pour tout $p \geq \ell(n)$, l'application de structure $M_p \rightarrow M_n$ (de la tour $\{M_s\}_{s \in \mathbb{N}}$) est triviale.

Supposons que $\{M_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ est une tour de π -modules pro-triviale. Il découle de la définition que pour tout n , et donc pour $n = 0$, la tour $\{H^*(\pi, M_s)\}_{s \in \mathbb{N}}$ est pro-triviale.

Réciproquement, considérons une tour de π -modules nilpotent telle que la tour $\{H^0(\pi, M_s)\}_{s \in \mathbb{N}}$ est pro-triviale. On rappelle que $\{H^0(\pi, M_s)\}_{s \in \mathbb{N}} = M_s^\pi$ [48, I-10]. On a donc que la tour $\{M_s^\pi\}_{s \in \mathbb{N}}$ est pro-triviale. Pour tout s , on a une suite exacte

$$M_s^\pi \rightarrow M_s \rightarrow M_s/M_s^\pi$$

ce qui donne lieu à une tour de suites exactes longues en cohomologie :

$$\{0\} \rightarrow H^0(\pi, M_s^\pi) \rightarrow H^0(\pi, M_s) \rightarrow H^0(\pi, M_s/M_s^\pi) \rightarrow H^1(\pi, M_s^\pi) \rightarrow \dots$$

Comme $\{M_s^\pi\}_{s \in \mathbb{N}}$ est pro-triviale, par hypothèse, la tour $\{H^1(\pi, M_s^\pi)_{s \in \mathbb{N}}$ est pro-triviale et donc $\{H^0(\pi, M_s/M_s^\pi) = M_s/M_s^{\pi^\pi}\}$ est pro-triviale.

Définissons itérativement, pour tout π -module M , et pour tout entier n des sous-modules $M^{(n)}$ de M de la manière suivante :

1. $M^{(1)} = M^\pi$
2. $M^{(n+1)}$ est l'image réciproque de $(M/M^{(n)})^{(1)}$ par la projection canonique $M \rightarrow M/M^{(n)}$

Le π -module M est nilpotent si et seulement si cette filtration est finie.

On a montré que $\{M_s^{(1)}\}_{s \in \mathbb{N}}$ et $\{M^{(2)}\}_{s \in \mathbb{N}}$ sont pro-triviales. En itérant l'argument précédent, on montre par récurrence que pour tout entier n , la tour $\{M_s^{(n)}\}_{s \in \mathbb{N}}$ est pro-triviale.

Fixons un entier s . Comme M_s est nilpotent, il existe un entier n tel que $M_s = M_s^{(n)}$. Or on a montré que $\{M_s^{(n)}\}_{s \in \mathbb{N}}$ est pro-triviale. Il existe donc un entier $\ell(s)$ tel que l'application de structure $M_{\ell(s)}^{(n)} \rightarrow M_s^{(n)} = M_s$ est nulle. On voit alors qu'en fait $M_{\ell(s)} \rightarrow M_s$ est également nulle, ce qui montre que $\{M_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ est pro-triviale. \square

Avec le lemme 3.3.3 à disposition, la démonstration de la proposition 3.3.2 est assez directe. Si $H^0(\pi, f)$ est pro-isomorphisme, $H^0(\pi, \ker f_s)$ est pro-trivial et donc d'après le lemme, comme $\ker f_s$ est pro-nilpotent, $\ker f_s$ est pro-triviale et f_s est un pro-monomorphisme. La pro-suite exacte longue de coefficients associée à la pro-suite exacte courte

$$M_s \xrightarrow{f_s} N_s \rightarrow \operatorname{coker} f_s$$

associée aux hypothèses que $H^0(\pi, f_s)$ est un pro-isomorphisme et $H^1(\pi, f_s)$ un pro-monomorphisme montrent que $H^0(\pi, \operatorname{coker} f_s)$ est pro-trivial. Comme $\operatorname{coker} f_s$ est également pro-nilpotent, on conclut avec le lemme que f_s est un pro-épimorphisme, et donc un pro-isomorphisme. \square

3.3.2 Un théorème de comparaison

Le lemme suivant est une version 'pro' de [45, lemma 3.8], sa version homologique [5, 2: III, 7.2] est utilisée dans [14].

Théorème 3.3.4 *Soit*

$$\{E_r^{s,t}(\alpha) \Rightarrow H^{i+j}(\alpha)\}_\alpha \xrightarrow{f} \{E_r'^{s,t}(\alpha) \Rightarrow H^{i+j}(\alpha)\}_\alpha$$

Un morphisme entre deux tours de suites spectrales du premier quadrant de type cohomologique. Si

1. $f : \{H^i(\alpha)\} \longrightarrow \{H'^i(\alpha)\}$ est un pro-isomorphisme pour tout i ,
2. $\{E_2^{s,t}(\alpha)\} \longrightarrow \{E_2'^{s,t}(\alpha)\}$ est un pro-isomorphisme pour $t < k$,

Alors

1. $\{E_2^{0,k}(\alpha)\} \longrightarrow \{E_2'^{0,k}(\alpha)\}$ est un pro-isomorphisme,
2. $\{E_2^{1,k}(\alpha)\} \longrightarrow \{E_2'^{1,k}(\alpha)\}$ est un pro-épimorphisme.

3.4 Démonstration du théorème de convergence forte

On traite d'abord l'équivalence des conditions 1 et 2 du théorème 3.1.3 dans le cas où $X = *$.

3.4.1 Cas où $X = *$

La condition 1 implique la condition 2.

D'après la reformulation de la convergence forte 3.1.2, l'augmentation est un pro-isomorphisme. Comme elle est équivariante relativement à l'action du groupe fondamental, on en déduit que la tour constante constituée par la cohomologie de la fibre est nilpotente, *i.e.* la cohomologie de la fibre est nilpotente.

La condition 2 implique la condition 1

On procède par récurrence. Considérons l'hypothèse de récurrence :

$\mathcal{H}_n : \{\pi^n \text{Tot}_\alpha \mathbb{F}_p[C(f, *)^\bullet]\} \longrightarrow H^n F$ est un pro – isomorphisme pour tout $i < n$.

L'énoncé \mathcal{H}_0 est trivialement vérifié pour $n = 0$. Supposons que l'énoncé est vrai au rang n . On applique la suite spectrale auxiliaire avec $X = B$ et g l'identité de B . On a deux tours de suites spectrales reliées par des augmentations.

$$\begin{array}{ccc}
 \{E_r^{s,t}(\alpha)\}_\alpha & \Rightarrow & \{\pi^{s+t} \text{Tot}_\alpha \mathbb{F}_p[C(f, id)^\bullet]\}_\alpha \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 E_r^{s,t} & \Rightarrow & H^{s+t} E
 \end{array} \tag{3.6}$$

Comme la suite spectrale de la ligne supérieure dégènère au terme E_2 , celle-ci converge fortement et le morphisme de comparaison est un isomorphisme à l'aboutissement. L'hypothèse de récurrence et le théorème de comparaison 3.3.4 montrent que :

- $H^0(B, \pi^n \text{Tot}_\alpha \mathbb{F}_p[C(f, *)^\bullet]) \longrightarrow H^0(B, H^0 F)$ est un pro-isomorphisme,
- $H^1(B, \pi^n \text{Tot}_\alpha \mathbb{F}_p[C(f, *)^\bullet]) \longrightarrow H^0(B, H^1 F)$ est un pro-monomorphisme.

D'après 3.3.1, il vient que :

- $H^0(B, \pi^n \text{Tot}_\alpha \mathbb{F}_p[C(f, *)^\bullet]) \longrightarrow H^0(\pi_1 B, H^0 F)$ est un pro-isomorphisme,
- $H^1(\pi_1 B, \pi^n \text{Tot}_\alpha \mathbb{F}_p[C(f, *)^\bullet]) \longrightarrow H^0(B, H^1 F)$ est un pro-monomorphisme.

D'après 3.3.1, les coefficients étant pro-nilpotents, on a démontré l'énoncé \mathcal{H}_n . Ceci achève la récurrence et la démonstration de l'équivalence entre le fait que la représentation d'holonomie est nilpotente et le fait que la suite spectrale d'Eilenberg-Moore converge fortement dans le cas où B est connexe et X réduit à un point.

3.4.2 Le cas général

On ne suppose plus que $X = *$. Dans cette situation, la convergence forte provient de la suite spectrale auxiliaire et du premier point. En effet, on a :

$$\begin{array}{ccc} H^s(B, \pi^t \text{Tot}_\alpha \mathbb{F}_p[C(f, g)^\bullet]) = \{E_2^{s,t}\}_\alpha & \Rightarrow & \{H^{s+t} \text{Tot}_\alpha \mathbb{F}_p[C(f, g)^\bullet]\}_\alpha \quad (3.7) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^s(B, H^t F) = E_2^{s,t} & \Rightarrow & H^{s+t} P \end{array}$$

ce qui montre que les deuxièmes termes de ces suites spectrales sont pro-isomorphes. Elles ont donc de même des termes E_∞ pro-isomorphes. Comme ces suites spectrales sont du premier quadrant, on a des pro-isomorphismes $\{H^{s+t} \text{Tot}_\alpha \mathbb{F}_p[C(f, g)^\bullet]\}_\alpha \longrightarrow H^{s+t} P$. D'après la reformulation 3.1.2, la suite spectrale converge fortement.

Deuxième partie

Modules instables

Avertissement. *Dans cette partie, on se spécialise au cas $p = 2$.*

Chapitre 4

Modules et Algèbres instables

Introduction

On commence par quelques rappels sur l'algèbre de Steenrod *modulo* 2 et sur la catégorie \mathcal{U} des modules instables sur l'algèbre de Steenrod *modulo* 2. On rappelle en particulier que cette catégorie admet deux filtration, la filtration de Krull et la filtration nilpotente.

On décrit ensuite des liens entre ces deux filtrations puis le comportement de la filtration nilpotente relativement à la suite spectrale d'Eilenberg-Moore pour les espaces profinis définie dans la première partie. Cette étude est motivée par l'application qui en faite dans la troisième partie. Notons que pour l'essentiel, ce qui est démontré dans les sections 4.1.3 et 4.2 de ce chapitre est inspiré du travail de L. Schwartz [53]. En particulier, les propositions 4.2.1 et 4.2.2 sont les analogues dans le cadre des espaces profinis des propositions 3.3 et 3.4 de [53]. Les preuves sont essentiellement les mêmes mais diffèrent en ce que dans [53], on dispose d'hypothèses de finitude dont nous ne disposons pas dans le présent travail.

4.1 L'algèbre de Steenrod

Nos références pour cette section sont [39], [43], [54].

4.1.1 Définition de l'algèbre de Steenrod

L'algèbre de Steenrod modulo 2, qu'on note \mathcal{A}_2 , est définie comme la \mathbb{F}_2 -algèbre graduée non commutative engendrée par les symboles $Sq^i, i \in \mathbb{N}$, où Sq^i est en degré i , quotientée par l'idéal bilatère engendré par l'ensemble

des relations d'Adem $\{R(a, b), a < b, (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$:

$$\text{Si } a < 2b, Sq^a Sq^b = \Sigma C_{b-1-i}^{a-2i} Sq^{a+b-i} Sq^i$$

On utilise les conventions habituelles sur les coefficients binomiaux, qui sont réduits *modulo* 2. On demande que Sq^0 soit l'élément unité de \mathcal{A}_2 . Les relations d'Adem étant homogènes, \mathcal{A}_2 est graduée et connexe.

On vérifie que la diagonale provenant de la formule de Cartan :

$$\Delta(Sq^n) = \Sigma_{i+j=n} Sq^i \otimes Sq^j$$

définit une structure d'algèbre de Hopf sur \mathcal{A}_2 .

On peut ainsi munir canoniquement le produit tensoriel de deux \mathcal{A}_2 -modules d'une structure de \mathcal{A}_2 -module.

D'autre part, \mathcal{A}_2 étant graduellement finie, on peut s'intéresser à l'algèbre de Hopf duale \mathcal{A}_2^* . J. Milnor a montré [39] que \mathcal{A}_2^* est une algèbre polynômiale en des indéterminées ξ_i de degré $2^i - 1$, ξ_0 étant l'unité. La diagonale D de \mathcal{A}_2^* est définie sur les générateurs par :

$$D(\xi_n) = \sum_{i+j=n} \xi_i^{2^j} \otimes \xi_j \quad .$$

4.1.2 Modules et algèbres instables

Les catégorie \mathcal{U} et \mathcal{K}

Une sous-catégorie abélienne de la catégorie des modules sur l'algèbre de Steenrod est la catégorie des modules instables :

Définition 4.1.1 (Modules instables) *Un module sur l'algèbre de Steenrod M est dit instable si :*

$$\forall x \in M, i > |x| \Rightarrow Sq^i x = 0 \quad .$$

La catégorie des modules instables est notée \mathcal{U} .

On peut également définir la notion d'algèbre instable.

Définition 4.1.2 (Algèbres instables) *Une algèbre instable M est la donnée d'un \mathbb{F}_2 -espace vectoriel gradué muni d'une structure de module instable et d'une structure d'algèbre commutative graduée compatibles au sens suivant :*

- $M \otimes M \longrightarrow M$ est \mathcal{A}_2 -linéaire,
- $Sq^{|x|} x = x^2$.

La catégorie des algèbres instables est notée \mathcal{K} .

Le foncteur d'oubli de la structure d'algèbre :

$$O : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{U}$$

admet un foncteur adjoint à gauche (algèbre instable libre sur un module),

$$U : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{K}$$

qu'on peut définir constructivement de la manière suivante. Etant donné un module instable M , l'algèbre $U(M)$ est l'algèbre symétrique sur M quotienté par l'idéal engendré par les relations $Sq^{|x|}x = x^2$. Comme on l'a remarqué précédemment, la structure d'algèbre de Hopf de \mathcal{A}_2 permet de munir canoniquement l'algèbre symétrique sur un module instable d'une structure de module instable, *via* la formule de Cartan. On vérifie que cette structure munit canoniquement le quotient $U(M)$ d'une structure d'algèbre instable *via* la projection.

Modules instables et topologie

Une grande partie de l'intérêt porté aux catégories \mathcal{U} et \mathcal{K} provient de leur relation avec la topologie. Le foncteur de cohomologie singulière à coefficients dans \mathbb{F}_2 prend naturellement valeurs dans la catégorie \mathcal{K} .

Foncteur de Lannes

L'endofoncteur de \mathcal{U} qui à un module instable associe son produit tensoriel avec la cohomologie du classifiant du groupe abélien $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ admet un adjoint à gauche le foncteur de Lannes T . Les propriétés du foncteur de Lannes sont nombreuses et saisissantes. Citons en particulier le fait que le foncteur de Lannes est exact, commute aux produits tensoriels, et commute aux colimites filtrantes [31]. Ceci a pour conséquence que si M est muni d'une structure d'algèbre instable, le module instable TM est également naturellement muni d'une telle structure. Autrement dit, le foncteur $T : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ induit un foncteur $T : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$.

4.1.3 Filtrations de la catégorie \mathcal{U}

La catégorie \mathcal{U} est munie de deux filtrations naturelles par des sous-catégories épaisses stables par colimites. La première est la filtration nilpotente, qui est décroissante, et la seconde est la filtration de Krull qui est croissante.

La filtration nilpotente

On désigne le degré d'un élément x d'un module instable par $|x|$. Pour tout module instable M et pour tout entier m , on définit des opérateurs

$$Sq_m : M \longrightarrow M, x \longmapsto Sq^{|x|-m}x \quad .$$

On dit qu'un élément x d'un module instable M est s -nilpotent si pour tout $0 \leq t < s$, un itéré de l'opérateur Sq_t annule x .

En d'autres termes, un élément x d'un module instable M est s -nilpotent si :

$$\forall 0 \leq t < s, \exists c \in \mathbb{N}, (Sq_t)^c x = 0 \quad .$$

Dans le cas où x est s -nilpotent, mais n'est pas $(s+1)$ -nilpotent, on dit que x est exactement s -nilpotent.

Un élément exactement 0-nilpotent est dit réduit. Cela signifie simplement que x est non nul et que $(Sq_0)^c x$ est non nul pour tout entier c .

Un module instable M est dit réduit si tous ses éléments sont réduits. Ceci signifie que l'opérateur $Sq_0 : M \longrightarrow M$ est un monomorphisme.

Un module instable est s -nilpotent si tous ses éléments sont au moins s -nilpotents. La sous-catégorie pleine de \mathcal{U} dont les objets sont les modules s -nilpotents est épaisse et stable par colimites. On la note \mathcal{Nil}_s . Cette sous-catégorie coïncide avec la plus petite sous-catégorie épaisse et stable par colimite qui contient tous les modules qui sont des suspension $s^{ièmes}$.

La filtration décroissante de la catégorie \mathcal{U} par les sous-catégories \mathcal{Nil}_s induit sur chaque module instable M une filtration décroissante naturelle par ses sous-modules M_s qui sont maximaux parmi les sous-modules s -nilpotents et maximaux.

Le sous-quotient M_s/M_{s+1} est la suspension $s^{ième}$ d'un module réduit $R_s M$. Nous utiliserons la variante technique suivante de ces sous-quotients.

Définition 4.1.3 *Soit M un module instable. On note \bar{M}_s son sous-module s -nilpotent maximal en degrés strictement plus grands que s , et $\bar{R}_s M$ la $s^{ième}$ désuspension du quotient de \bar{M}_s par M_{s+1} . Il n'est pas difficile de voir que $\bar{R}_s M$ est le sous-module de $R_s M$ constitué des éléments de degré strictement positif.*

La catégorie $\mathcal{U}/\mathcal{Nil}$

Comme la catégorie \mathcal{Nil} est épaisse dans \mathcal{U} , on peut former la catégorie quotient $\mathcal{U}/\mathcal{Nil}$ [19], [26]. Le foncteur de passage au quotient

$$r : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}/\mathcal{N}il$$

admet un adjoint à droite

$$s : \mathcal{U}/\mathcal{N}il \longrightarrow \mathcal{U} \quad .$$

L'unité de l'adjonction entre r et s

$$Id_{\mathcal{U}} \longrightarrow r \circ s$$

est appelée localisation loin de $\mathcal{N}il$ ou encore $\mathcal{N}il$ -fermeture.

On peut rendre plus concrets les morphismes de \mathcal{U} qui deviennent des isomorphismes dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$.

Définition 4.1.4 *Un morphisme de $\mathcal{U} : M \longrightarrow N$ est appelé*

- *un F -monomorphisme si $\ker(f)$ est nilpotent,*
- *un F -épimorphisme si $\operatorname{coker}(f)$ est nilpotent,*
- *un F -isomorphisme s'il est un F -monomorphisme et un F -épimorphisme.*

Les F -monomorphismes, F -épimorphismes et F -isomorphismes induisent respectivement des monomorphismes, des épimorphismes et des isomorphismes dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$.

Exemple.

- *L'application de localisation loin de $\mathcal{N}il$*

$$M \longmapsto (r \circ s)(M)$$

est un F -isomorphisme.

- *Soit K une algèbre instable, l'application de passage au quotient de K sur son quotient réduit est un F -isomorphisme.*

Filtration de Krull

Pour tout entier n , la sous-catégorie \mathcal{U}_n de \mathcal{U} est la sous-catégorie pleine de \mathcal{U} dont les objets sont ceux annulés par le foncteur \bar{T}^n . Cette filtration coïncide avec la notion de filtration de Krull au sens de Gabriel [19]. Le premier cran \mathcal{U}_0 de la filtration de Krull est constitué des modules *localement finis*. Cette filtration est complète, dans le sens où la plus petite sous-catégorie de \mathcal{U} stable par colimite et contenant tous les \mathcal{U}_n pour tout entier n est \mathcal{U} elle-même.

La filtration de Krull induit sur chaque module instable une filtration croissante naturelle et complète par des sous-modules qui sont dans \mathcal{U}_n . Dans le cas des modules réduits, cette filtration coïncide avec la *filtration par le poids* :

Définition 4.1.5 (Poids d'un module réduit) 1. Soit n un entier naturel ; on définit $\alpha(n)$ comme le nombre de 1 dans l'écriture diadique de n .

2. Un module instable réduit est de poids inférieur ou égal à n s'il est nul dans les degrés t tels que $\alpha(t) > n$.

Le poids d'un module instable réduit M est le plus petit entier n tel que M est de poids inférieur ou égal à n . Un module réduit est filtré par ses sous-modules qui sont de poids n et maximaux. Cette filtration est exhaustive. Le poids d'un module instable réduit M est noté $w(M)$.

Proposition 4.1.6 [18]

Un module réduit est dans \mathcal{U}_n si et seulement s'il est de poids inférieur ou égal à n .

Cette caractérisation est précieuse et nous servira par la suite.

Filtration de Krull et filtration nilpotente

Le lemme suivant affirme *grosso modo* que les foncteurs \bar{R}_s sont exacts à gauche *modulo Nil*.

Proposition 4.1.7 Soit

$$\{0\} \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \{0\}$$

une suite exacte dans \mathcal{U} et soit L le conoyau de $\bar{R}_s A \longrightarrow \bar{R}_s B$. Pour tout entier s , la suite :

$$\{0\} \longrightarrow \bar{R}_s A \longrightarrow \bar{R}_s B \longrightarrow \bar{R}_s C$$

est exacte en $\bar{R}_s A$ et le noyau de $L \longrightarrow \bar{R}_s C$ est constitué d'éléments nilpotents.

En d'autres termes, le premier groupe d'homologie du complexe

$$\bar{R}_s(\{0\} \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \{0\})$$

est nilpotent.

Démonstration. On chasse dans le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccccc}
 A_{s+1} & \xrightarrow{\quad} & B_{s+1} & \xrightarrow{\quad} & C_{s+1} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \bar{A}_s & \xrightarrow{\quad} & \bar{B}_s & \xrightarrow{\quad} & \bar{C}_s \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \Sigma^s \bar{R}_s A & \xrightarrow{\quad} & \Sigma^s \bar{R}_s B & \xrightarrow{\quad} & \Sigma^s \bar{R}_s C
 \end{array} \tag{4.1}$$

Exactitude en $\bar{R}_s A$: Soit x un élément de $\ker(\bar{R}_s A \rightarrow \bar{R}_s B)$ et soit x_1 un élément de \bar{A}_s qui se projette sur $\Sigma^s x \in \Sigma^s \bar{R}_s A$. Soit x_2 l'image de x_1 dans \bar{B}_s . l'élément x_2 se projette sur 0 dans $\Sigma^s \bar{R}_s B$. Donc $x_2 \in B_{s+1}$, et pour un certain entier c , on a $Sq_s^c x_2 = 0$. Par injectivité de $\bar{A}_s \rightarrow \bar{B}_s$, il vient que $Sq_s^c x_1 = 0$, i.e x_1 est dans A_{s+1} . Par conséquent x est nul, ce qui montre que $\bar{R}_s A \rightarrow \bar{R}_s B$ est un monomorphisme.

L est nilpotent : Soit $x \in \ker(\bar{R}_s B \rightarrow \bar{R}_s C)$.

Soit x_1 un relèvement de $\Sigma^s x$ dans \bar{B}_s . Soit x_2 l'image de x_1 dans \bar{C}_s . x_2 se projette sur 0 dans $\Sigma^s \bar{R}_s C$. Donc $x_2 \in C_{s+1}$, et pour un certain entier c , on a $Sq_s^c x_2 = 0$. Par conséquent, l'image de l'élément $Sq_s^c x_1$ dans C est nulle. Par exactitude de la suite $A \rightarrow B \rightarrow C$, il existe un élément x_3 de A qui s'envoie sur $Sq_s^c x_1$. Par injectivité de $\bar{A}_s \rightarrow \bar{B}_s$, x_3 est au moins s -nilpotent. Soit $\Sigma^s x_4$ l'image de x_3 dans $\Sigma^s \bar{R}_s A$. L'image de $\Sigma^s x_4$ dans $\Sigma^s \bar{R}_s B$ est $Sq_s^c \Sigma^s x = \Sigma^s Sq_0^c x$. C'est exactement dire que L est nilpotent. \square

Corollaire 4.1.8 *Soit*

$$\{0\} \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \{0\}$$

une suite exacte dans \mathcal{U} . Si A est dans \mathcal{U}_p et C dans \mathcal{U}_q , alors pour tout s , $\bar{R}_s B$ est dans $\mathcal{U}_{\max\{p,q\}}$.

Démonstration.

\mathcal{U}_n est épaisse pour tout entier n , donc pour tout entier s , $\bar{R}_s A$ est dans \mathcal{U}_p et $\bar{R}_s C$ est dans \mathcal{U}_q .

Etant donné que $\bar{R}_s B$ est réduit, la proposition 4.1.6 assure que $\bar{R}_s B$ est dans \mathcal{U}_n si et seulement si son poids $w(\bar{R}_s B)$ est inférieur ou égal à n .

Or la proposition 4.1.6 assure que l'on a $w(\bar{R}_s A) \leq p$ et $w(\bar{R}_s C) \leq q$. Par définition du poids, $\bar{R}_s A$ est nul dans les degrés i tels que $\alpha(i) > p$, et $\bar{R}_s C$ est nul dans les degrés i tels que $\alpha(i) > q$.

On utilise alors la proposition 4.1.7 pour montrer que $\bar{R}_s B$ est nul dans les degrés i tels que $\alpha(i) > \max\{p, q\}$, ce qui achève la démonstration. Plus précisément, soit x un élément de $\bar{R}_s B$ de degré tel que $\alpha(|x|) > \max\{p, q\}$. L'image de x dans $\bar{R}_s C$ est nulle donc, la proposition 4.1.7 assure qu'il existe un entier c tel que $(Sq_0)^c x$ provient d'un élément x_1 de $\bar{R}_s C$. Mais le degré de $(Sq_0)^c x$ est $2^c |x|$ et $\alpha(2^c |x|) = |x| > \max\{p, q\} \geq w(\bar{R}_s A)$. Par conséquent, x_1 est nul, de même que son image $(Sq_0)^c x$ dans $\bar{R}_s B$. Or $\bar{R}_s B$ est réduit, donc x est nul.

□

Corollaire 4.1.9 *Soit p un entier naturel et*

$$\{0\} \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \{0\}$$

une suite exacte dans \mathcal{U} . Si C dans Nil_{m+1} alors pour $s \leq m$, $\bar{R}_s B$ est dans \mathcal{U}_p si et seulement si $\bar{R}_s A$ est dans \mathcal{U}_p .

Démonstration.

Pour tout entier $s \leq m$, on a $\bar{R}_s C = 0$, et donc un monomorphisme

$$\{0\} \longrightarrow \bar{R}_s A \longrightarrow \bar{R}_s B$$

qui est un F -épimorphisme.

On en déduit que $w(\bar{R}_s A) = w(\bar{R}_s B)$ (cf la démonstration de 4.1.8). Donc, d'après la caractérisation de la filtration de Krull sur les modules réduits 4.1.6, on obtient que $\bar{R}_s A \in \mathcal{U}_n$ si et seulement si $\bar{R}_s B \in \mathcal{U}_n$.

□

Corollaire 4.1.10 *Soit*

$$\{0\} \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \{0\}$$

une suite exacte dans \mathcal{U} . Si A dans Nil_{m+1} alors pour $s \leq m$, $\bar{R}_s B$ est dans \mathcal{U}_p si $\bar{R}_s C$ est dans \mathcal{U}_p .

Démonstration.

D'après la proposition 4.1.7, on a pour $s \leq m$, un monomorphisme :

$$\{0\} \longrightarrow \bar{R}_s B \longrightarrow \bar{R}_s C \quad .$$

Par conséquent, pour $s \leq m$, le poids de $\bar{R}_s B$ est plus petit que celui de $\bar{R}_s C$, et donc d'après la caractérisation 4.1.6, $\bar{R}_s B$ est dans \mathcal{U}_n dès que $\bar{R}_s C$ est dans \mathcal{U}_n . □

4.2 Suite spectrale d'Eilenberg-Moore et filtration nilpotente

Proposition 4.2.1 *Soit X un espace profini et d un entier strictement plus grand que 1 tels que :*

- *la cohomologie réduite de X est d -nilpotente,*
- *$\bar{H}^* X / (\bar{H}^* X)_{2d}$ est dans \mathcal{U}_1 .*

On a :

- *la cohomologie réduite de ΩX est $(d-1)$ -nilpotente,*
- *$\bar{H}^* \Omega X / (\bar{H}^* \Omega X)_{2(d-1)}$ est dans \mathcal{U}_1 .*
- *$\bar{R}_{2d-2} \bar{H}^* \Omega X$ est dans \mathcal{U}_2 .*

Démonstration. La preuve est un peu longue, et mérite d'être segmentée.

1. $E_{\infty}^{-s,*}$ est un sous-quotient de $\bar{H}^* X^{\otimes s}$, donc $E_{\infty}^{-s,*}$ est sd -nilpotent et $F_{-s} \bar{H}^* \Omega X / F_{-s+1} \bar{H}^* \Omega X = \Sigma^{-s} E_{\infty}^{-s,*}$ est $s(d-1)$ -nilpotent.
2. On montre par récurrence que $F_{-s} \bar{H}^* \Omega X / F_{-1} \bar{H}^* \Omega X$ est $2(d-1)$ -nilpotent.
3. La catégorie $\mathcal{N}il_{2(d-1)}$ est stable par colimite. De ce fait $\bar{H}^* \Omega X / F_{-1} \bar{H}^* \Omega X$ est encore $2(d-1)$ -nilpotent.
4. Comme d'après le point 1, $F_{-1} \bar{H}^* \Omega X / F_0 \bar{H}^* \Omega X$ est $(d-1)$ -nilpotent. $\mathcal{N}il_{(d-1)}$ étant épaisse, $\bar{H}^* \Omega X$ est $(d-1)$ -nilpotent. Ceci prouve le premier point de la proposition.
5. On a une suite exacte :

$$\{0\} \longrightarrow F_{-1} \bar{H}^* \Omega X \longrightarrow \bar{H}^* \Omega X \longrightarrow \bar{H}^* \Omega X / F_{-1} \bar{H}^* \Omega X \longrightarrow \{0\}$$

dont le dernier terme $\bar{H}^* \Omega X / F_{-1} \bar{H}^* \Omega X$ est $2(d-1)$ -nilpotent. Le corollaire 4.1.9 assure que pour tout $s \leq 2d-3$, $\bar{R}_s \bar{H}^* \Omega X$ est dans \mathcal{U}_1 . Donc $\bar{R}_s \bar{H}^* \Omega X$ est dans \mathcal{U}_1 pour $s \leq 2d-3$. Comme \mathcal{U}_n est épaisse, on obtient que $\bar{H}^* \Omega X / (\bar{H}^* \Omega X)_{2d-2}$ est dans \mathcal{U}_1 . C'est le deuxième point de la proposition.

6. On montre par récurrence que $F_{-s}\bar{H}^*\Omega X/F_{-2}\bar{H}^*\Omega X$ est $3(d-1)$ -nilpotent.
7. En passant à la colimite, $\bar{H}^*\Omega X/F_{-1}\bar{H}^*\Omega X$ est $3(d-1)$ -nilpotent.
8. Comme $d > 1$ par hypothèse, on a $3(d-1) > 2(d-1)$, et par le corollaire 4.1.9, $\bar{R}_{2d-2}\bar{H}^*\Omega X$ est dans \mathcal{U}_2 si et seulement si $\bar{R}_{2d-2}F_{-2}\bar{H}^*\Omega X$ est dans \mathcal{U}_2 .
9. On a une suite exacte :

$$\{0\} \longrightarrow F_{-1}\bar{H}^*\Omega X \longrightarrow F_{-2}\bar{H}^*\Omega X \longrightarrow \Sigma^{-2}E_{-2,*}^\infty \longrightarrow \{0\} \quad .$$

10. $\Sigma F_{-1}\bar{H}^*\Omega X$ est un quotient de \bar{H}^*X par des éléments au moins $2d$ -nilpotents. En effet,

$$d_r : E_r^{-1-r,*} \longrightarrow \Sigma^{(r-1)}E_r^{-1,*} \quad ,$$

et $E_r^{-1-r,*}$ est un sous-quotient de $\bar{H}^*X^{\otimes(r+1)}$ qui est au moins $(r+1)d$ -nilpotent, et donc $E_{r+1}^{-1,*}$ est un quotient de $E_r^{-1,*}$ par des éléments de degré de nilpotence au moins égal à $(r+1)d - (r-1) = (r+1)(d-1) + 2$. Or $(r+1)(d-1) + 2 \geq 2d$ car $d > 1$.

11. Donc, d'après le corollaire 4.1.10, comme $\bar{R}_{2d-1}\bar{H}^*X$ est dans \mathcal{U}_1 par hypothèse d'après les isomorphismes

$$\bar{R}_{2d-2}F_{-1}\bar{H}^*\Omega X \cong \bar{R}_{2d-1}\Sigma F_{-1}\bar{H}^*X \cong \bar{R}_{2d-1}E_\infty^{-1,*} \cong \bar{R}_{2d-1}\bar{H}^*X$$

$\bar{R}_{2d-2}F_{-1}\bar{H}^*\Omega X$ est dans \mathcal{U}_1 .

12. $E_\infty^{-2,*}$ est un sous-quotient de $\bar{H}^*X^{\otimes 2}$ par des éléments au moins $3d$ -nilpotents. C'est à dire que $E_\infty^{-2,*} \cong C/B$, avec $C \subset \bar{H}^*X^{\otimes 2}$ et $B \in \mathcal{N}il_{3d}$.

13. En effet,

$$d_r : E_r^{-2-r,*} \longrightarrow \Sigma^{(r-1)}E_r^{-2,*} \quad ,$$

et $E_r^{-2-r,*}$ est au moins $(r+2)$ -nilpotent en tant que sous-quotient de $\bar{H}^*X^{\otimes(r+2)}$. Par conséquent, $E_{r+1}^{-2,*}$ est un quotient de $E_r^{-2,*}$ par des éléments de degré de nilpotence au moins égal à $(r+2)d - (r-1) = (r+2)(d-1) + 3 \geq 3d$ (car $d > 1$).

14. Or $\bar{R}_{2d}\bar{H}^*X^{\otimes 2} \cong (\bar{R}_d\bar{H}^*X)^{\otimes 2}$ qui est dans \mathcal{U}_2 .
15. Donc $\bar{R}_{2d}B$ est dans \mathcal{U}_2 (proposition 4.1.7) et $\bar{R}_{2d}E_\infty^{-2,*}$ est dans \mathcal{U}_2 (corollaire 4.1.10).
16. D'après les points 9, 11, 15, et le corollaire 4.1.8, $F_{-2}\bar{H}^*\Omega X$ est dans \mathcal{U}_2 .

17. D'après 8, $\bar{R}_{2d-2}F_{-2}\bar{H}^*\Omega X$ est dans \mathcal{U}_2 , ce qui achève la démonstration. \square

Proposition 4.2.2 *Supposons que :*

- la cohomologie réduite de X est nilpotente,
- $\bar{R}_1\bar{H}^*X$ est dans \mathcal{U}_1 .

Alors $\bar{R}_0F_{-2}\bar{H}^\Omega X$ est dans \mathcal{U}_2 .*

Démonstration.

On a une suite exacte :

$$\{0\} \longrightarrow F_{-1}\bar{H}^*\Omega X \longrightarrow F_{-2}\bar{H}^*\Omega X \longrightarrow \Sigma^{-2}E_{-2,*}^\infty \longrightarrow \{0\} \quad .$$

1. $\Sigma F_{-1}\bar{H}^*\Omega X$ est un quotient de H^*X par des éléments nilpotents. En effet, $d_r : E_r^{-1-r,*} \longrightarrow \Sigma^{(r-1)}E_r^{-1,*}$, et $E_r^{-1-r,*}$ est un sous-quotient de $\bar{H}^*X^{\otimes(r+1)}$ qui est $r+1$ -nilpotent. $E_{r+1}^{-1,*}$ est un quotient de $E_r^{-1,*}$ par des éléments de degré de nilpotence au moins égal à $(r+1) - (r-1) = 2$. Comme $\bar{R}_1\bar{H}^*X$ est dans \mathcal{U}_1 , le corollaire 4.1.10 montre que

$$\bar{R}_1E_\infty^{-1,*} \cong \bar{R}_0\Sigma^{-1}E_\infty^{-1,*} \cong \bar{R}_0F_{-1}\bar{H}^*\Omega X$$

est dans \mathcal{U}_1 .

2. $E_\infty^{-2,*}$ est un sous-quotient de $\bar{H}^*X^{\otimes 2}$, i.e $E_\infty^{-2,*}$ s'écrit C/B , avec $C \subset \bar{H}^*X^{\otimes 2}$, et B est au moins 3-nilpotent. B est au moins 3-nilpotent pour la raison suivante. On a

$$d_r : E_r^{-2-r,*} \longrightarrow \Sigma^{(r-1)}E_r^{-2,*} \quad ,$$

ce qui montre que C est constitué d'éléments de degré de nilpotence au moins égal à $(r+2) - (r-1) = 3$. Or $\bar{R}_2\bar{H}^*X^{\otimes 2} \cong (\bar{R}_1\bar{H}^*X)^{\otimes 2}$ qui est dans \mathcal{U}_2 . Donc \bar{R}_2B est dans \mathcal{U}_2 (proposition 4.1.7) et $\bar{R}_2E_\infty^{-2,*}$ est dans \mathcal{U}_2 (corollaire 4.1.10).

Finalement, $\bar{R}_0\Sigma^{-2}E_\infty^{-2,*} \cong \bar{R}_2E_\infty^{-2,*}$ est dans \mathcal{U}_2 .

3. On en déduit $F_{-2}\bar{H}^*\Omega X$ est dans \mathcal{U}_2 . \square

Corollaire 4.2.3 *Soit X un espace profini dont la cohomologie réduite est dans $\mathcal{N}il_d$, $d > 0$. L'homomorphisme de coin induit pour $s < 2d$ des monomorphismes*

$$\bar{R}_s\bar{H}^*X \longrightarrow \bar{R}_{(s-1)}\bar{H}^*\Omega X \quad .$$

Démonstration.

L'homomorphisme de coin $\bar{H}^*X \longrightarrow \Sigma \bar{H}^*\Omega X$ factorise de la manière suivante :

$$\bar{H}^*X \twoheadrightarrow E_{\infty}^{-1,*} \cong \Sigma F_{-1}\bar{H}^*\Omega X \hookrightarrow \Sigma \bar{H}^*\Omega X \quad .$$

Dans la preuve des propositions 4.2.1 et 4.2.2, on a vu que le noyau de la flèche $\bar{H}^*X \twoheadrightarrow E_{\infty}^{-1,*}$ est $2d$ -nilpotent. L'application du corollaire 4.1.10 fournit donc pour $s < 2d$ un monomorphisme $\bar{R}_s\bar{H}^*X \hookrightarrow \bar{R}_sE_{\infty}^{-1,*}$.

Comme par ailleurs \bar{R}_s préserve les monomorphismes, on obtient, pour $s < 2d$, des monomorphismes

$$\bar{R}_s\bar{H}^*X \hookrightarrow \bar{R}_s\Sigma \bar{H}^*\Omega X \cong \bar{R}_{s-1}\bar{H}^*\Omega X \quad .$$

□

Chapitre 5

La série de Loewy des algèbres instables

Introduction

Dans cette partie, on démontre un théorème de structure concernant les algèbres instables sur l'algèbre de Steenrod *modulo* 2. Ce théorème avait été conjecturé dans [54].

La preuve nécessite l'introduction d'opérations de Steenrod particulières, ce que l'on fait dans la section 5.1. L'idée d'utiliser de telles opérations est due à L. Schwartz.

Muni de ces opérations, on peut aborder la section 5.3, où le théorème de structure évoqué ci-dessus est énoncé et démontré.

Signalons enfin que les résultats de cette partie sont extraits d'une pré-publication à l'université Paris 13, en collaboration avec L. Schwartz [21].

5.1 Sur certaines opérations universelles

5.1.1 Les opérations $\theta(\delta, n, \ell, k)$

Soit n un entier, on rappelle qu'on a défini précédemment $\alpha(n)$ comme le nombre de 1 dans l'écriture diadique de n . Supposons que l'écriture diadique de n soit

$$n = 2^{a_1} + \dots + 2^{a_h} \quad .$$

On a $h = \alpha(n)$. On définit la quantité $\Gamma(n)$ de la manière suivante :

$$\Gamma(n) = \min\{|a_i - a_j|, a_i; 1 \leq i, j \leq h, i \neq j\} \quad .$$

Proposition 5.1.1 *Soient δ, ℓ, n, k des entiers non nuls. Supposons que :*

- $\alpha(n) \geq \alpha(\ell)$
- $\Gamma(n) > \log_2(\delta)$
- $k > 2\log_2(n) + \log_2(\delta)$.

Alors il existe une opération de Steenrod $\theta(\delta, n, \ell, k)$, telle que pour toute algèbre instable K et pour tout élément de degré δ dans K :

$$\theta(\delta, n, \ell, k)(x^n) = x^{2^k \ell} \quad .$$

L'opération $\theta(\delta, n, \ell, k)$ est donc universelle. Pour démontrer la proposition 5.1.1, il suffit de construire l'opération $\theta(\delta, n, \ell, k)$ dans le cas où x est ι_δ de degré δ , l'élément non nul de degré δ de l'algèbre instable libre en un générateur de degré δ . Cette algèbre est isomorphe à $H^*(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \delta), \mathbb{F}_2)$, la cohomologie d'un espace d'Eilenberg-MacLane $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \delta)$. Le sous-module instable engendré par ι_δ est $F(\delta)$, le module instable librement engendré en degré δ .

5.1.2 Les opérations $Q_a(\delta)$

Rappelons que l'algèbre de Steenrod \mathcal{A}_2 est une algèbre de Hopf, et que son dual \mathcal{A}_2^* est une algèbre polynômiale en des générateurs ξ_i de degré $2^i - 1$ [39]. L'opération $Q_a(\delta)$ est définie comme l'élément dual du monôme ξ_a^δ dans la base duale de la base monômiale de \mathcal{A}_2^* . En particulier $Q_s(2^t)$ est l'opération P_s^t [35]. Les opérations $Q_a(\delta)$ vérifient :

- $|Q_a(\delta)| = \delta(2^a - 1)$,
- $Q_a(n)(\iota_\delta^{2^b})$ est non nul si et seulement si $n = k2^b$ avec $k = 0, \dots, \delta$ et $Q_a(\delta 2^b)(\iota_\delta^{2^b}) = \iota_\delta^{2^{a+b}}$, pour tout entier b .
- $\Delta(Q_a(n)) = \sum_{i+j=n} Q_a(i) \otimes Q_a(j)$

Pour démontrer la seconde propriété, on utilise la coaction de Milnor ([39]; [18], section 1) qu'on note λ selon l'usage :

$$\lambda : M \longrightarrow M \hat{\otimes} \mathcal{A}_*$$

le produit tensoriel étant complété.

Si u est la classe de degré 1 dans $H^*B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on a pour tout entier $m \geq 0$:

$$\lambda(u^{2^m}) = \sum_{i \geq 0} u^{2^{i+m}} \otimes \xi_i^m \quad .$$

Le lemme qui suit permet de calculer λ sur un produit tensoriel :

Lemme 5.1.2 *On a :*

$$\lambda(x \otimes y) = (\text{Id} \otimes \text{Id} \otimes \mu)(\text{Id} \otimes \tau \otimes \text{Id})(\lambda(x) \otimes \lambda(y))$$

τ désignant l'échange des second et troisième facteurs, et μ le produit de l'algèbre duale de l'algèbre de Steenrod.

L'unique morphisme de modules instables de $F(\delta)$ sur $H^*(B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{\oplus \delta})$ qui envoie ι_δ sur le produit x_1, \dots, x_δ est injectif. L'image par ce morphisme de $\iota_\delta^{2^m}$ est $(x_1 \dots x_\delta)^{2^m} = x_1^{2^m} \dots x_\delta^{2^m}$. La deuxième propriété découle alors du calcul de la coaction de Milnor sur u^{2^m} dans $H^*B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et du lemme précédent :

$$\lambda((x_1, \dots, x_\delta)^{2^m}) = \sum_{i_1, \dots, i_\delta} x_1^{2^{i_1+m}} \dots x_\delta^{2^{i_\delta+m}} \otimes \xi_{i_1}^{2^m} \dots \xi_{i_\delta}^{2^m}$$

On voit qu'un terme de la forme $\xi_{i_1}^{2^m} \dots \xi_{i_\delta}^{2^m}$ ne peut être égal à ξ_a^j que si $i_j \in \{0, a\}$, ce qui impose $j = k2^m$, où k est le cardinal de l'ensemble des indices i_j égaux à a . Ceci prouve la seconde propriété.

La troisième propriété se déduit sans difficulté du fait que le coproduit de l'algèbre de Steenrod est dual du produit dans l'algèbre duale, qui est polynômiale :

$$\langle \Delta(Q_a(n)), \xi^I \otimes \xi^J \rangle = \langle Q_a(\delta), \xi^{I+J} \rangle$$

Par définition de $Q_a(\delta)$, cette quantité est non nulle si et seulement si $\xi^{I+J} = \xi_a^n$, i.e si et seulement si

$$\xi^I \otimes \xi^J = \xi_a^i \otimes \xi_a^j \quad \text{avec} \quad i + j = n \quad .$$

Ceci démontre la formule pour le coproduit de $Q_a(n)$.

Des considérations précédentes, on dégage facilement le lemme suivant, qui guidera la suite des calculs.

Lemme 5.1.3 *Les opérations $Q_n(j)$ obéissent aux règles suivantes de calcul : Pour tous entiers a et n , et pour tout entier b tel que $2^b > \delta 2^a$, on a*

$$Q_n(2^a)(\delta \iota_\delta^{2^a+2^b}) = \iota_\delta^{2^{a+m}+2^b} \quad ,$$

et en particulier, pour $n = b - a$,

$$Q_{b-a}(2^a)(\delta \iota_\delta^{2^a+2^b}) = \iota_\delta^{2^{a+b+1}} \quad .$$

5.1.3 Construction des opérations $\theta(\delta, n, \ell, k)$

Soient n et ℓ deux entiers de décompositions diadiques respectives $n = 2^{a_1} + \dots + 2^{a_h}$ et $\ell = 2^{\alpha_1} + \dots + 2^{\alpha_s}$, avec $h \geq s$. On suppose que les exposants a_i et α_i sont rangés en ordre croissant.

Le cas où $\alpha(n) = h = \alpha(\ell)$

Plaçons nous d'abord dans le cas particulier où $\alpha(n) = h = \alpha(\ell)$. On pose alors :

$$\theta(\delta, n, \ell, k) = \prod_{i=h, \dots, 1} Q_{k+\alpha_i-a_i}(\delta 2^{a_i}) \quad .$$

Dans cette formule on commence, à gauche, par $Q_{k+\alpha_h-a_h}(\delta 2^{a_h})$.

La condition sur l'entier k dans 1.4 implique que toutes les quantités $k + \alpha_i - a_i$ sont positives et non-nulles. Les règles de calcul énoncées plus haut montrent que $Q_{k+\alpha_1-a_1}(\delta 2^{a_1})$ agit uniquement sur le facteur $\iota_\delta^{2^{a_1}}$ de ι_δ^n . Plus précisément, le calcul de $Q_{k+\alpha_1-a_1}(\delta 2^{a_1})$ sur ι_δ^n s'effectue comme suit :

$$Q_{k+\alpha_1-a_1}(\delta 2^{a_1})(\iota_\delta^n) = Q_{k+\alpha_1-a_1}(\delta 2^{a_i})(\iota_\delta^{2^{a_1}+\dots+2^{a_h}}) \quad ,$$

donc

$$Q_{k+\alpha_1-a_1}(\delta 2^{a_1})(\iota_\delta^n) = \sum_{i+j=\delta 2^{a_1}} Q_{k+\alpha_1-a_1}(i)(\iota_\delta^{2^{a_1}}) Q_{k+\alpha_1-a_1}(j)(\iota_\delta^{2^{a_2}+\dots+2^{a_h}}) \quad .$$

Dans la somme le second membre du produit est non nul seulement quand $j = 0$. En effet il s'écrit :

$$\sum_{i_2+\dots+i_h=j} \prod_{t=2, \dots, h} Q_{k+\alpha_1-a_1}(i_t)(\iota_\delta^{2^{a_t}}) \quad ,$$

et on a toujours $i_t \leq j \leq \delta 2^{a_1}$. Et par ailleurs $\delta 2^{a_1} < 2^{a_t}$, pour $t \neq 1$, car $\log_2(\delta) < \Gamma(n)$.

On obtient donc :

$$Q_{k+\alpha_1-a_1}(\delta 2^{a_1})(\iota_\delta^n) = \iota_\delta^{2^{a_2}+\dots+2^{a_h}+2^{k+\alpha_1}} \quad .$$

On applique alors l'opération $Q_{k+\alpha_2-a_2}(\delta 2^{a_2})$. Pour effectuer le calcul comme précédemment, les inégalités suivantes doivent être satisfaites :

- $\delta 2^{a_2} < 2^{a_t}$, pour $2 < t$,
- $\delta 2^{a_2} < 2^{k+\alpha_1}$.

Ces inégalités sont satisfaites sous les hypothèses de 1.4. En effet, la première inégalité est conséquence de $\log_2(\delta) < \Gamma(n)$, et la seconde inégalité est conséquence de $k > 2\log_2(n) + \log_2(\delta) \geq \log_2(n) + \log_2(\delta)$. L'inégalité $k > 2\log_2(n) + \log_2(\delta)$ est plus que suffisante dans ce cas. On poursuit ainsi itérativement le calcul.

Le cas où $\alpha(n) > \alpha(\ell)$

Passons au cas général, et supposons que $s < h$. On doit modifier la formule donnant $\theta(\delta, n, \ell, k)$. On peut prendre :

$$\theta(\delta, n, \ell, k) = Q_{k+\alpha_h-a_s-h+s}(\delta 2^{a_h+h-s}) \times \theta' \times \prod_{i=s-1, \dots, 1} Q_{k+\alpha_i-a_i}(\delta 2^{a_i}) \quad .$$

avec

$$\theta' = \prod_{i=h-s-1, \dots, 0} Q_{a_h+i-a_{s+i}}(\delta 2^{a_{s+i}}) \quad .$$

Le calcul est analogue à celui mené ci-dessus sauf que, dans la partie du calcul correspondant à θ' et $Q_{k+\alpha_h-a_s-h+s}(\delta 2^{a_h+h-s})$, on a besoin de l'inégalité $k > 2\log_2(n) + \log_2(\delta)$.

Le principe de l'opération est le suivant. On a :

Etape 1

$$\begin{aligned} & \prod_{i=s-1, \dots, 1} Q_{k+\alpha_i-a_i}(\delta 2^{a_i})(x^{2^{a_1}+\dots+2^{a_{s-1}}+2^{a_s}+\dots+2^{a_h}}) \\ &= (x^{2^{k+\alpha_1}+\dots+2^{k+\alpha_{s-1}}})(x^{2^{a_s}+\dots+2^{a_h}}) \quad . \end{aligned}$$

Car $Q_{k+\alpha_i-a_i}(\delta 2^{a_i})$ n'agit que sur $x^{2^{a_i}}$.

Etape 2

Puis on a :

$$\begin{aligned} & \theta'(x^{2^{k+\alpha_1}+\dots+2^{k+\alpha_{s-1}}})(x^{2^{a_s}+\dots+2^{a_h}}) \\ &= (\prod_{i=h-s-1, \dots, 0} Q_{a_h+i-a_{s+i}}(\delta 2^{a_{s+i}}))((x^{2^{k+\alpha_1}+\dots+2^{k+\alpha_{s-1}}})(x^{2^{a_s}+\dots+2^{a_h}})) \\ &= (x^{2^{k+\alpha_1}+\dots+2^{k+\alpha_{s-1}}})(\prod_{i=h-s-1, \dots, 0} Q_{a_h+i-a_{s+i}}(\delta 2^{a_{s+i}}))(x^{2^{a_s}+\dots+2^{a_h}}) \quad . \end{aligned}$$

Car les opérations $Q_{a_h+i-a_{s+i}}(\delta 2^{a_{s+i}})$ n'opèrent pas sur $(x^{2^{k+\alpha_1}+\dots+2^{k+\alpha_{s-1}}})$. On est donc ramené au calcul de :

$$(\prod_{i=h-s-1, \dots, 0} Q_{a_h+i-a_{s+i}}(\delta 2^{a_{s+i}}))(x^{2^{a_s}+\dots+2^{a_h}}) \quad .$$

Etape 3

On commence par $i = 0$, et on a :

$$\begin{aligned} & Q_{a_h-a_s}(\delta 2^{a_s})(x^{2^{a_s}+\dots+2^{a_h}}) \\ &= (x^{2^{a_s+1}+\dots+2^{a_h}})Q_{a_h-a_s}(\delta 2^{a_s})(x^{2^{a_s}}) \\ &= (x^{2^{a_s+1}+\dots+2^{a_h}})(x^{2^{a_h}}) \end{aligned}$$

$$= (x^{2^{a_s+1}+\dots+2^{a_h-1}})(x^{2^{a_h+1}}) \quad .$$

Ensuite, pour $i = 1$, on a :

$$\begin{aligned} & Q_{a_h+1-a_{s+1}}(\delta 2^{a_1})(x^{2^{a_s+1}+\dots+2^{a_h-1}})(x^{2^{a_h+1}}) \\ &= (x^{2^{a_s+2}+\dots+2^{a_h-1}})(x^{2^{a_h+1}})Q_{a_h+1-a_{s+1}}(\delta 2^{a_1})(x^{2^{a_s+1}}) \\ &= (x^{2^{a_s+2}+\dots+2^{a_h-1}})(x^{2^{a_h+1}})(x^{2^{a_h+1}}) \\ &= (x^{2^{a_s+2}+\dots+2^{a_h-1}})(x^{2^{a_h+2}}) \quad . \end{aligned}$$

Et ainsi de suite. On arrive à :

$$(\prod_{i=h-s-1,\dots,0} Q_{a_h+i-a_{s+i}}(\delta 2^{a_{s+i}}))(x^{2^{a_s}+\dots+2^{a_h}}) = x^{2^{a_h+h-s}} \quad .$$

Soit :

$$\begin{aligned} & \theta' \times \prod_{i=s-1,\dots,1} Q_{k+\alpha_i-a_i}(\delta 2^{a_i})(x^{2^{a_1}+\dots+2^{a_{s-1}}+2^{a_s}+\dots+2^{a_h}}) \\ &= (x^{2^{k+\alpha_1}+\dots+2^{k+\alpha_{s-1}}})(x^{2^{a_h+h-s}}) \quad . \end{aligned}$$

Etape 4

On finit en appliquant l'opération $Q_{k+\alpha_s-a_h-h+s}(\delta 2^{a_h+h-s})$:

$$\begin{aligned} & Q_{k+\alpha_s-a_h-h+s}(\delta 2^{a_h+h-s})(x^{2^{k+\alpha_1}+\dots+2^{k+\alpha_{s-1}}})(x^{2^{a_h+h-s}}) \\ &= (x^{2^{k+\alpha_1}+\dots+2^{k+\alpha_{s-1}}})Q_{k+\alpha_s-a_h-h+s}(\delta 2^{a_h+h-s})(x^{2^{a_h+h-s}}) \\ &= (x^{2^{k+\alpha_1}+\dots+2^{k+\alpha_{s-1}}})(x^{2^{a_h+h-s}}) \\ &= (x^{2^{k+\alpha_1}+\dots+2^{k+\alpha_s}}) \\ &= x^{2^k \ell} \quad . \end{aligned}$$

Il faut bien sûr donner quelques justifications.

Etape 1

Le calcul est justifié par les inégalités $2^{a_i} > \delta 2^{a_j}$, $i > j$ et $2^{k+\alpha_i} > \delta 2^{a_j}$, pour tout $i \leq s$ et $j \leq h$.

L'inégalité $2^{a_i} > \delta 2^{a_j}$, $i > j$ est satisfaite d'après l'hypothèse sur $\gamma(n)$.

L'inégalité $2^{k+\alpha_i} > \delta 2^{a_j}$ pour $i \leq s$ et $j \leq h$ est satisfaite d'après l'hypothèse que $k > 2\log_2(n) + \log_2(\delta)$. En effet, ceci entraîne $k > \log_2(n) + \log_2(\delta)$, soit $k > a_h + \log_2(\delta)$, soit $2^k > \delta 2^{a_i}$ Pour tout i .

Etape 2 et 3

Même type de justification.

Etape 4

Ici on a besoin de $\delta 2^{a_h+h-s} < 2^{k+\alpha_1}$. Ceci provient de $k > 2\log_2(n) + \log_2(\delta)$. En effet, on a $a_h + h - s < a_h + h < 2a_h < 2\log_2(n)$.

5.2 Séries de Loewy

5.2.1 Définition

On peut définir dans toute catégorie abélienne admettant des socles la notion de Série de Loewy. En particulier, on peut définir cette notion dans la catégorie \mathcal{U}/Nil [26].

Définition 5.2.1 (série de Loewy) *La série de Loewy de l'objet F de \mathcal{U}/Nil est une filtration $\{\text{Soc}_n F\}_{n \in \mathbb{N}}$ de F , définie itérativement de la manière suivante :*

- $\text{Soc}_0 F = \{0\}$
- $\text{Soc}_1 F$ est le plus grand objet semi-simple de F .
- $\text{Soc}_n F$ est l'image réciproque par la projection $F \rightarrow F/\text{Soc}_n F$ de $\text{Soc}_1(F/\text{Soc}_n F)$.

On obtient ainsi une filtration de F sous la forme :

$$\text{Soc}_0 F \subset \text{Soc}_1 F \subset \dots \subset \text{Soc}_n F \dots \subset F$$

La série de Loewy d'un module M est la sa série de Loewy vu comme objet de \mathcal{U}/Nil .

Remarque 5.2.2 En général, on note $\text{Soc} F$ plutôt que $\text{Soc}_1 F$.

5.2.2 Quelques propriétés des séries de Loewy

Remarquons tout d'abord la propriété suivante qui découle de la définition de la série de Loewy :

Proposition 5.2.3 *Soit F un objet de \mathcal{U}/Nil . Pour tout $0 \leq i \leq n$, on a des isomorphismes :*

$$\text{Soc}_i(F/\text{Soc}_{n-i} F) = \text{Soc}_n F$$

Définition 5.2.4 On appelle \mathcal{L}_n la sous-catégorie pleine de \mathcal{U}/Nil dont les objets ont une série de Loewy qui stabilise au rang n , i.e les objets F qui vérifient $\text{Soc}_n F = F$.

Proposition 5.2.5 *La série de Loewy est fonctorielle, dans le sens qu'une application entre deux modules respecte la filtration de Loewy, i.e Soc_n est un endofoncteur de la catégorie \mathcal{U}/Nil dans \mathcal{L}_n*

Remarque 5.2.6 En vertu de la proposition précédente, $\text{Soc}_n : \mathcal{L}_n \rightarrow \mathcal{U}/\text{Nil}$ est l'adjoint à droite de l'inclusion naturelle de \mathcal{L}_n dans \mathcal{U}/Nil . Par conséquent, le foncteur Soc_n préserve les monomorphismes et commute aux limites.

5.3 La série de Loewy des algèbres instables

Notons \mathcal{F} la catégorie dont les objets sont les foncteurs de source la catégorie des \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels de dimension finie et de but la catégorie de tous les \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels, et dont les morphismes sont les transformations naturelles de foncteurs.

Contrairement à la catégorie \mathcal{U} , la catégorie $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ possède, ainsi qu'il a été dit plus haut, nombre d'objets simples. En vertu de l'équivalence entre la catégorie $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ et la catégorie \mathcal{F} , tous les résultats qui suivent possèdent un énoncé équivalent dans la catégorie \mathcal{F} . Ceci conduit naturellement à considérer la série de Loewy des objets de $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$. On désignera par série de Loewy d'un module instable sa série de Loewy comme objet de $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$.

Proposition 5.3.1 [51] *Un objet M de $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ est limite directe des $\text{Soc}_n M$. En d'autres termes, la série de Loewy est complète dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$.*

Remarque 5.3.2 *On peut évidemment définir une suite croissante de sous-modules dans un module instable de la manière décrite plus haut en considérant les objets simples dans \mathcal{U} , c'est-à-dire les suspensions du module trivial \mathbf{F}_2 . Mais dans ce cas la filtration n'est pas convergente, la limite est le plus grand sous-module localement fini.*

Lorsqu'un module instable K admet une structure d'algèbre instable, sa série de Loewy est soumise à des restrictions fortes. On montre :

Théorème 5.3.3 *Soit K une algèbre instable. On a l'alternative suivante :*

- *Soit K est localement nilpotente (le sous-module de K constitué par les éléments de degré strictement positif est dans $\mathcal{N}il$) ;*
- *Soit la série de Loewy (dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$) de K ne stabilise pas.*

Par exemple, l'algèbre de Dickson a une série de Loewy infinie. La démonstration repose sur la proposition 5.1.1 qui permet de construire sur l'algèbre K , dans le cas où elle n'est pas localement nilpotente, une filtration qui minore en un certain sens la série de Loewy de K . Plus précisément, on utilise le critère suivant, qui est une conséquence directe de la définition de la série de Loewy, et qui permet de minorer la longueur de la série de Loewy d'un module.

Lemme 5.3.4 *Soit M un objet de $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$. Si M admet une filtration :*

$$\{0\} \subset M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n \subset M$$

telle que toutes les inclusions soient strictes, et toutes les extensions induites par les inclusions $M_i/\text{Soc}_i M_i \subset M_{i+1}/\text{Soc}_i M_{i+1}$ soient essentielles dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$, alors la série de Loewy de M est au moins de longueur $n + 1$.

Pour démontrer le théorème 5.3.3, il suffit de se donner une algèbre instable réduite K non concentrée en degré 0, et de montrer que sa série de Loewy dans \mathcal{U}_n ne stabilise pas. Soit K une telle algèbre; il existe par hypothèse un élément x de K tel que x^{2^k} est non nul pour tout k et donc tel que x^ℓ est non nul pour tout ℓ . Rappelons que l'on a toujours $\alpha(|x|) \leq \omega(x) \leq |x|$ et $w(xy) \leq w(x) + w(y)$, pour tout x et y dans K . En particulier, $w(x^n) \leq nw(x)$.

Si M est un module instable qui n'est pas réduit, on définit son poids comme celui du quotient de M par son plus grand sous-module nilpotent. On fera ci-dessous l'hypothèse que tous les modules rencontrés sont réduits; on peut toujours se ramener à cette situation, à l'aide du foncteur de localisation r [54]. Les détails sont laissés au lecteur.

On peut supposer (6.2) que $\alpha(|x|) = w(x)$. Soit $\delta = |x|$ et soit $r = \log_2 \delta$. On définit :

$$n(k) = \sum_{i=0}^k 2^{i(r+1)} \quad .$$

On a $\alpha(\delta n(k)) = (k+1)\omega$ car $2^{r+1} > \delta$, il suit que :

$$w(x^{2^t n(k)}) = (k+1)\omega \quad .$$

Pour tout entier t , on a :

$$\alpha(2^t n(k)) = k \quad \text{et} \quad \Gamma(2^t n(k)) = \min\{t, r+1\} \quad .$$

Dès que $h > 2\log_2(n(k+1)) + \log_2(\delta)$ et $t \geq r+1$, le quadruplet $(\delta, 2^t n(k+1), n(k), h)$ satisfait aux hypothèses de la proposition 5.1.1, et on a :

$$\theta(\delta, 2^t n(k+1), n(k), h)(x^{2^{r+1} n(k+1)}) = x^{n(k)2^h} \quad .$$

Pour tout entier k , on fixe un entier $\ell(k)$ tel que $\ell(k) > 2\log_2(n(k+1)) + \log_2(\delta)$, et afin d'alléger les notations, on note

$$\theta_{k,t} = \theta(\delta, 2^{t+r+1} n(k+1), n(k), \ell(k)) \quad \text{et} \quad y_p = x^{2^{r+1} n(p)} \quad .$$

Les relations précédentes s'écrivent :

$$\theta_{p+1,t}(y_{p+1}^{2^t}) = y_p^{2^{\ell(p)}} \quad .$$

On note aussi θ_k au lieu de $\theta_{k,0}$ et on a $\theta_{p+1}(y_{p+1}) = y_p^{2^{\ell(p)}}$.

On considère alors le sous-module K_p de K engendré par $\{x^{n(i)}; 0 \leq i \leq p\}$. On a $K_p \subset K_{p+1}$.

On va montrer que la filtration $\{K_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ induit une filtration sur K dans \mathcal{U}_n satisfaisant aux hypothèses de la proposition 5.3.4. On commence par observer :

Lemme 5.3.5 *Le poids du module K_p est $(p+1)\omega$. En particulier K_p est trivial dans le degré des éléments $x^{n(k)}$, $k > p$.*

Le point essentiel est le suivant.

Lemme 5.3.6 *Pour tout entier p , le sous-module $K_p/\text{Soc}_p K_p$ n'est pas facteur direct dans $K_{p+1}/\text{Soc}_p K_{p+1}$. De plus, pour tout entier t , $y_{p+1}^{2^t}$ n'est pas dans $\text{Soc}_{p+1} K_{p+1}$.*

On va montrer ce lemme par récurrence sur p .

Pour $p = 0$, on doit regarder l'inclusion

$$K_0 = K_0/\text{Soc}_0 K_0 \subset K_1/\text{Soc}_0 K_1 = K_1 \quad .$$

Le poids du module K_0 est égal à ω (le poids de x) qui est strictement inférieur à $\alpha(|y_1|) = 2\omega$ et K_0 est donc trivial dans le degré 2ω . Comme par ailleurs on a :

$$\theta_1(y_1) = y_0^{2^{\ell(0)}}$$

l'inclusion ne peut être scindée dans \mathcal{U}_n . On aurait sinon une application ϕ telle que $\phi(\theta_1(y_1)) = \theta_1(\phi(y_1)) = 0$ et $\phi(\theta_1(y_1)) = y_0^{2^{\ell(0)}} \neq 0$.

Le fait que $y_1^{2^t}$ n'est pas dans $\text{Soc} K_1$ résulte de ce que $\text{Soc} K_0$ est facteur direct dans $\text{Soc} K_1$. En effet, si $y_1^{2^t}$ est dans $\text{Soc} K_1$, alors $y_0^{2^{\ell(0)}}$ serait également dans $\text{Soc} K_0$ du fait de la relation $\theta_{1,t}(y_1^{2^t}) = y_0^{2^{\ell(0)}}$. Mais comme on vient de le voir, cette relation implique que $\text{Soc} K_0 \subset \text{Soc} K_1$ est non scindée, ce qui est une contradiction.

Supposons maintenant la propriété vraie à l'ordre p .

On considère l'inclusion :

$$K_{p+1}/\text{Soc}_{p+1} K_{p+1} \subset K_{p+2}/\text{Soc}_{p+1} K_{p+2} \quad .$$

D'après l'hypothèse de récurrence, l'élément y_{p+1} n'est pas dans $\text{Soc}_{p+1} K_{p+1}$, donc y_{p+2} n'est pas dans $\text{Soc}_{p+1} K_{p+2}$.

On a la relation :

$$\theta_{p+2}(y_{p+2}) = y_{p+1}^{2^{\ell(p+1)}} \quad .$$

Un raisonnement identique à celui tenu pour $p = 0$ montre que l'inclusion considérée est non scindée dans \mathcal{U}_n .

D'autre part, les relations

$$\theta_{p+2,t}(y_{p+2}^{2^t}) = y_{p+1}^{2^{\ell(p+1)+t}}$$

montrent que $y_{p+2}^{2^t}$ ne se projette pas dans $\text{Soc}(K_{p+2}/\text{Soc}_{p+1}K_{p+2})$, en utilisant un argument identique à celui donné pour $p = 0$ une fois encore. Ceci est équivalent au fait que $y_{p+2}^{2^t}$ n'est pas dans $\text{Soc}_{p+2}K_{p+2}$.

Ceci montre l'énoncé au rang $p + 1$, et donc, par récurrence, le lemme 7.5. On peut alors appliquer la proposition 5.3.4 qui montre que la série de Loewy de K est au moins de longueur p pour tout entier p , et donc la série de Loewy de K est infinie, ce qui achève la démonstration du théorème.

Troisième partie

Une étude de quelques problèmes de non-réalisabilité

Chapitre 6

Position du problème

6.1 Introduction

On a vu en 4.1.2 que le foncteur de cohomologie singulière à coefficients dans un corps fini prend ses valeurs dans la catégorie \mathcal{K} des algèbres instables. On peut oublier ensuite la structure d'algèbre, ne conservant ainsi que la structure de module instable. On arrive dans la catégorie \mathcal{U} . Puis la filtration nilpotente permet d'aboutir dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ via les sous-quotients de la filtration nilpotente. Ceci donne une suite de modules réduits. On peut enfin filtrer chacun de ces modules réduits par le poids.

On peut se demander à chaque niveau, quels sont les objets qui proviennent de la topologie. C'est ce qu'on appelle un problème de réalisabilité. Par exemple, on peut se donner un module instable M et se demander s'il existe un espace dont la cohomologie réduite admet M comme module instable sous-jacent.

6.2 Les conjectures de Kuhn

Un théorème classique de non-réalisabilité est le théorème de J. F. Adams sur les applications entre sphères ayant un invariant de Hopf égal à un [1].

Ce théorème affirme le fait suivant. Il n'existe pas d'espace topologique dont le module instable sous-jacent à sa cohomologie soit de la forme :

$$u \xrightarrow{Sq^{2^i}} v \tag{6.1}$$

pour $i > 3$.

Une manière de comprendre ce théorème est de dire que la structure de module instable de la cohomologie d'un espace topologique ne peut pas être lacunaire, au sens où les opérations de Steenrod ne peuvent pas 'sauter' de trop grandes plages de nullité.

On peut montrer ainsi que les modules réduits de poids n , qui typiquement ont une cohomologie lacunaire (les opérations de Steenrod sautent au-dessus de trous de longueur arbitrairement grande) ne sont pas la cohomologie d'un espace.

Si on ne s'intéresse qu'à la structure de module instable, le foncteur de cohomologie singulière commutant aux suspensions, on peut s'autoriser à travailler à suspension près.

La plus petite sous-catégorie de \mathcal{U} qui contient les modules instables réduits de poids n , qui est stable par colimite et par suspension, est le n -ième cran \mathcal{U}_n de la filtration de Krull de la catégorie des modules instables. Les modules instables réduits de poids $n > 0$ ne sont pas réalisables comme cohomologie d'un espace car ils ne peuvent être munis d'une structure d'algèbre instable au dessus de leur structure de module instable. N. Kuhn a proposé la conjecture suivante, la *strong realization conjecture* :

Conjecture. *Soit X un espace topologique. Si \bar{H}^*X est dans un cran fini de la filtration de Krull, alors \bar{H}^*X est localement finie.*

6.2.1 L'approche de L. Schwartz

L. Schwartz a démontré [53, théorème 0.1, p. 520] cette conjecture sous certaines restrictions de finitude.

Sa méthode se déroule en deux temps. On procède par l'absurde en supposant qu'il existe un espace X dont la cohomologie, sans être localement finie est dans un cran fini de la filtration de Krull .

La réduction de N. Kuhn

On montre qu'il existe alors un espace X dont la cohomologie est dans le premier cran de la filtration de Krull sans être localement finie.

Utilisation de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore

On utilise alors la structure particulière des modules qui sont dans le premier cran de la filtration de Krull sans être localement finis pour construire pour tout entier i assez grand, des classes $\alpha_{i,d}$ dans la cohomologie \bar{H}^*X d'un tel espace X , qui vérifient les deux propriétés suivantes :

- Le cup carré de $\alpha_{i,d}$ est nul pour tout entier i assez grand,
- $\alpha_{i,d}$ est exactement d -nilpotente pour tout entier i assez grand.

Les propriétés particulières de ces classes $\alpha_{i,d}$ montrent qu'elles induisent dans $\bar{H}^*\Omega X$ à travers l'homomorphisme de coin des classes α_{d-1} , qui vérifient :

- Le cup carré de $\alpha_{i,d-1}$ est nul pour tout entier i assez grand,
- $\alpha_{i,d-1}$ est $(d-1)$ -nilpotente.

Par une récurrence descendante sur d , il existe des classes $\alpha_{i,0}$ dans $\bar{H}^*\Omega^d X$ qui pour i assez grand, sont simultanément réduites et de cup-carré nul. C'est une contradiction.

Mais cette méthode a dans chacune de ses étapes un point faible d'ordre technique. L'outil qui permet la réduction de Kuhn est l'interprétation géométrique du foncteur de Lannes qui n'est connue que sous certaines hypothèses de finitude. De même, la suite spectrale d'Eilenberg-Moore cohomologique n'est bien comprise que sous des hypothèses de finitude.

6.3 De l'utilisation des espaces profinis dans les problèmes de non réalisabilité

Il existe pourtant un moyen de contourner le problème technique précédent. C'est là qu'interviennent les espaces profinis. On sait que la cohomologie d'un espace est toujours la cohomologie d'un espace profini (voir la remarque C.4.4, p. 123).

D'autre part, on connaît une interprétation géométrique du foncteur de Lannes ainsi qu'une suite spectrale d'Eilenberg-Moore dans la catégorie des espaces profinis. Le théorème suivant implique donc la *strong realization conjecture* pour $p = 2$ qui sera démontrée dans le chapitre suivant, en utilisant l'approche de L. Schwartz.

Théorème 6.3.1 *Soit X un espace profini. Si la cohomologie de X à coefficients dans le \mathbb{F}_2 éléments est dans un cran fini de la filtration de Krull, alors elle est localement finie.*

On obtient ainsi la *strong realization conjecture*.

Théorème 6.3.2 *Soit X un espace. Si la cohomologie de X à coefficients dans \mathbb{F}_2 est dans un cran fini de la filtration de Krull, alors elle est localement finie.*

Chapitre 7

La conjecture forte de non-réalisation

Dans ce chapitre, démontre la *strong réalisation conjecture* en mettant en oeuvre la méthode de L. Schwartz [53] dans le cadre des espaces profinis, dans le cas où $p = 2$.

Cette partie du travail a été effectuée en collaboration avec François-Xavier Dehon. Une version préliminaire d'un article rassemblant ces résultats est disponible [10].

7.1 Théorie de Lannes et réduction de N. Kuhn

7.1.1 Interprétation géométrique du foncteur de Lannes

Nous rappelons ici l'interprétation géométrique du foncteur T de Lannes donnée par Morel dans [40]. La catégorie $\widehat{\mathcal{S}}$ est simpliciale et admet des objets fonctionnels de source un ensemble simplicial. En particulier, on peut s'intéresser aux objets fonctionnels de source le classifiant d'un p -groupe abélien élémentaire. Dans la catégorie des espaces profinis, le foncteur T de Lannes fait *toujours* le lien entre la cohomologie continue d'un espace fonctionnel et celle de l'objet fonctionnel.

Théorème 7.1.1 [40, §2.2, corollaire 1] *Soit X un espace profini. Le morphisme canonique*

$$\eta : T(H^*X) \cong T(H^*RX) \longrightarrow$$

$$H^*Map(B(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), RX) \cong H^*RMap(B(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), X)$$

est un isomorphisme d'algèbres instables.

On peut de même donner une interprétation géométrique au foncteur de Lannes *réduit* \bar{T} . Soit X un espace profini, RX le remplacement fibrant de X , et Y la cofibre homotopique du morphisme d'espaces profinis

$$RX \longrightarrow \text{Map}(B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), RX)$$

induit par l'incusion des applications constantes.

On a dans la catégorie des espaces profinis une suite exacte longue de cofibration et d'autre part, $H^* \text{Map}(B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), RX)$ est naturellement isomorphe comme algèbre instable à TH^*RX .

Comme l'évaluation au point de base $B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ fait de RX un rétracte de $\text{Map}(B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), RX)$, la suite exacte longue se désagrège en des suites exactes courtes scindées. L'identification de H^*X comme facteur direct de $H^* \text{Map}(B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), RX)$ correspond au scindement naturel

$$TH^*RX = H^*RX \oplus \bar{T}H^*RX.$$

Ce qui produit un isomorphisme naturel $H^*Y = \bar{T}H^*RX$, et donc fournit une interprétation géométrique de $\bar{T}H^*X$, valable pour tout espace profini X .

7.1.2 Réduction de N. Kuhn

Théorème 7.1.2 (Réduction de Kuhn) *Soit n un entier strictement positif. S'il existe un espace profini dont la cohomologie est dans \mathcal{U}_{n+1} mais n'est pas dans \mathcal{U}_n , alors il existe un espace profini dont la cohomologie est dans \mathcal{U}_1 mais n'est pas dans \mathcal{U}_0 .*

Démonstration. Soit X un espace profini dont la cohomologie M est dans \mathcal{U}_{n+1} mais n'est pas dans \mathcal{U}_n . Alors d'après ce qui précède ; $\bar{T}M$ est la cohomologie d'un espace, qui est dans \mathcal{U}_n , mais n'est pas dans \mathcal{U}_{n-1} . On montre ainsi l'énoncé par une récurrence descendante. □

7.2 Construction de classes de cohomologie et contradiction

7.2.1 Un lemme technique

Lemme 7.2.1 *Soit M un module qui est dans \mathcal{U}_1 mais n'est pas dans \mathcal{U}_0 . Soit η l'unité de l'adjonction entre \bar{T} et $-\otimes \bar{H}^*B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le morphisme η*

factorise par $M \otimes F(1)$. Soit L (respectivement L') le noyau (respectivement le conoyau) de cette factorisation de η . On a une suite exacte :

$$\{0\} \longrightarrow L \longrightarrow M \xrightarrow{\eta} \bar{T}M \otimes F(1) \longrightarrow L' \longrightarrow \{0\} \quad .$$

Les module instables L et L' sont localement finis.

Démonstration. Dans [52], ce résultat est démontré sous l'hypothèse que M est de type fini. Tout module instable est colimite filtrante de ses sous-modules de type fini. Etant donné que les colimites filtrantes sont exactes, commutent aux produits tensoriels ainsi qu'au foncteur \bar{T} et du fait que \mathcal{U}_0 est stable par colimites, il vient que ce résultat est vrai en l'absence de toute hypothèse de finitude. \square

7.2.2 Construction des classes $\alpha_{i,d}$

Soit X un espace profini dont la cohomologie est dans \mathcal{U}_1 mais n'est pas dans localement fini. Le module instable $\bar{T}H^*X$ est non nul car H^*X est dans \mathcal{U}_1 mais pas dans \mathcal{U}_0 . Soit $d - 1$ la connexité de $\bar{T}H^*X$.

Avertissement. Dans toute la suite de ce chapitre, l'entier d est l'entier tel que $\bar{T}H^*X$ est $(d - 1)$ -connexe.

Remarquons tout de suite que si un espace profini X est dans \mathcal{U}_1 mais n'est pas dans \mathcal{U}_0 , il en est de même pour toute ses suspensions et les quotients eventuels de X par l'un de ses squelettes.

On peut donc supposer que X est une suspension, et par conséquent, que $d \geq 1$ et que tous les cup-produits sont nuls dans la cohomologie réduite de X .

On peut aussi supposer X aussi connexe que l'on veut. L'intérêt de cette démarche est la simplification suivante : un module instable est s -nilpotent si et seulement si $T^n M$ est $(s - 1)$ -connexe pour tout n . En vertu du scindement $TM = M \oplus \bar{T}M$, il apparaît que M est s -nilpotent si et seulement si M est $(s - 1)$ -connexe et $\bar{T}^n M$ est $(s - 1)$ -connexe pour tout n .

Par conséquent, quitte à quotienter X par son $(d - 1)$ -squelette, on peut supposer que \bar{H}^*X est d -nilpotent (rappelons que $d - 1$ est la connexité de $\bar{T}H^*X$).

Lemme 7.2.2 *Il existe un entier i_d tel que pour tout $i \geq i_d$, il existe des classes $\alpha_{i,d}$ qui vérifient :*

- la classe $\alpha_{i,d}$ est de degré $2^i + d$,
- la classe $\alpha_{i,d}$ est exactement d -nilpotente,

- $Sq^{2^i} \alpha_{i,d} = \alpha_{i+1,d}$,
- $\alpha_{i,d} \cup \alpha_{i,d}$ est nul

Démonstration. Posons $M = H^*X$. On applique le lemme 7.2.1. Supposons que \bar{TM} est $(d-1)$ -connexe. Alors il existe $\alpha \in \bar{TM}$, l'élément α étant de degré d .

Il existe une borne i_0 , telle que les classes $\alpha \otimes u^{2^i} \in \bar{TM} \otimes F(1)$ sont d'image nulle dans L' pour $i > i_0$, car L' est localement fini. Ainsi, $\alpha \otimes u^{2^i}$ provient d'un élément $\alpha'_{i,d}$ de M , i.e. $\eta(\alpha'_{i,d}) = \alpha \otimes u^{2^i}$.

Le quatrième point du lemme découle de ce qu'on s'est ramené à supposer que X est une suspension au début de cette section : son algèbre de cohomologie est donc triviale.

Etant donné que \bar{TM} est localement fini, il existe une borne entière h telle que toute opération de Steenrod de degré plus grand que h annule l'élément α de \bar{TM} , i.e. $\mathcal{A}_2^{\geq h} \alpha = 0$.

On choisit alors :

- $i_d = \max\{i_0, 2h\}$,
- $\alpha_{i_d,d} = \alpha'_{i_d,d}$,
- pour tout $i \geq i_d$, $\alpha_{i+1,d} = Sq^{2^i} \alpha_{i,d}$.

Ces classes vérifient le premier et le troisième point du lemme. Le second point découle du fait suivant. Pour tout $t < d$,

$$\eta(Sq_t \alpha_{i,d}) = (Sq_t \alpha) \otimes u^{2^i}$$

Donc, pour c suffisamment grand, $\eta(Sq_t^c \alpha_{i,d}) = 0$, car L' est localement fini, et donc $Sq_t^c \alpha_{i,d}$ est localement fini, car provenant de L .

Comme $i_d > 1$ par définition, on a $|Sq_t \alpha_{i,d}| > d > t$, et pour tout $\ell > 0$, et donc $Sq_t^\ell \alpha_{i,d}$ est t -nilpotent. Il en est donc de même pour $\alpha_{i,d}$.

Pour $t = d$, on a

$$\eta(Sq_d \alpha_{i,d}) = (Sq_d \alpha) \otimes u^{2^i} = \alpha \otimes u^{2^{i+1}} \neq 0 \quad .$$

Ce qui montre que $Sq_d \alpha_{i,d}^c$ est non nul pour tout entier c , i.e. on a montré que $\alpha_{i,d}$ est exactement d -nilpotente, ce qui démontre le point 2 du lemme.

□

7.2.3 Construction des classes $\alpha_{i,\ell}$

On a construit dans la section précédente, pour tout $i \geq i_d$, des classes $\alpha_{d,i}$ satisfaisant à certaines propriétés (lemme 7.2.2)

On va définir par récurrence (descendante), pour tout entier $0 \leq \ell \leq d-1$, et pour tout $i \geq i_d$ des classes $\alpha_{\ell-1,i}$.

Supposons que les classes $\alpha_{i,\ell}$ sont construites pour $i \geq i_\ell$. On définit $\alpha_{\ell-1,i}$ comme la désuspension de l'image de $\alpha_{\ell,i}$ par l'homomorphisme de coin $H^*\Omega^{d-\ell}X \longrightarrow \Sigma H^*\Omega^{d-\ell+1}X$.

Lemme 7.2.3 *Les classes $\alpha_{i,\ell}$ construites précédemment ont les propriétés suivantes, pour tout $d \geq \ell \geq 0$. Il existe un entier i_ℓ , tel que pour tout entier $i \geq i_\ell$:*

- la classe $\alpha_{i,\ell}$ est de degré $2^i + \ell$,
- la classe $\alpha_{i,\ell}$ est exactement ℓ -nilpotente,
- $Sq^{2^i} \alpha_{i,\ell} = \alpha_{i+1,\ell}$,
- $\alpha_{i,\ell} \cup \alpha_{i,\ell}$ est nul.

Démonstration.

Les trois premières affirmations du lemme sont faciles :

- Le premier point résulte des définitions
- Le second point est conséquence du fait qu'on a des monomorphismes (voir la proposition 4.2.3) qui sont induits par le morphisme de coin itéré :

$$R_d \bar{H}^* X \hookrightarrow R_{d-1} \bar{H}^* \Omega X \hookrightarrow \dots \hookrightarrow R_0 \bar{H}^* \Omega^d X$$

En effet, soit $\bar{\alpha}_{i,\ell}$ l'image de $\alpha_{i,\ell}$ dans $R_{d-\ell} \bar{H}^* \Omega^{d-\ell} X$. Les classes $\bar{\alpha}_{i,\ell}$ sont les images successives de $\bar{\alpha}_{i,d}$ par les monomorphismes précédents, et donc $\alpha_{i,\ell}$ est non nulle pour tout $\ell \leq d$. Une récurrence sur la proposition 4.2.1 montre d'autre part que $\bar{H}^* \Omega^{d-\ell} X$ est au moins ℓ -nilpotent. Par conséquent les classes $\alpha_{i,\ell}$ sont au moins ℓ -nilpotentes et réduisent non trivialement dans $R_{d-\ell} \bar{H}^* \Omega^{d-\ell} X$. C'est exactement dire qu'elles sont ℓ -nilpotentes.

- Le troisième point est conséquence des propriétés de compatibilité de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore aux opérations de Steenrod.

Le quatrième point se démontre par une récurrence descendante, que l'on renvoie au prochain paragraphe (7.2.4). □

Si l'on admet ce quatrième point, la démonstration de la conjecture de N. Kuhn est terminée, car on les deuxième et quatrième points du lemme 7.2.3 sont contradictoires.

7.2.4 Le cup-carré $\alpha_{i,\ell} \cup \alpha_{i,\ell}$ est nul pour i suffisamment grand

On procède par récurrence descendante sur ℓ .

Si $\ell > 1$

Supposons que pour $i \geq i_\ell$, $\alpha_{i,\ell} \cup \alpha_{i,\ell} = 0$.

Alors $\alpha_{i,\ell} \otimes \alpha_{i,\ell}$ définit un 1-cycle, qui est en fait un cycle permanent. En effet, $\alpha_{i,\ell} \otimes \alpha_{i,\ell}$ est exactement 2ℓ -nilpotente, et l'image des différentielles au moins $3d$ -nilpotentes (cf la démonstration de la proposition 4.2.1). Soit $\omega_{i,\ell-1}$ une classe de la cohomologie de $H^*\Omega^{d-l+1}$ qui est détectée par le cycle $\alpha_{i,\ell} \otimes \alpha_{i,\ell}$.

Lemme 7.2.4 *La classe $\omega_{i,\ell-1}$ est au moins $(2\ell - 2)$ -nilpotente.*

Démonstration.

$\omega_{i,\ell-1}$ est au moins $(\ell - 1)$ -nilpotent car c'est le degré de nilpotence de $H^*\Omega^{d-l+1}$. Soit $\overline{\omega_{i,\ell-1}}^s$ l'image de $\omega_{i,\ell-1}$ dans $\bar{R}_s H^*\Omega^{d-l+1}$. La classe $\overline{\omega_{i,\ell-1}}^s$ est de degré $2^{i+1} + 2\ell - 2 - s$. On a

$$\alpha(2^{i+1} + 2\ell - 2 - s) \geq 2 \quad ,$$

or $\bar{R}_s H^*\Omega^{d-l+1}$ est dans \mathcal{U}_1 , pour $\ell - 1 \leq s \leq 2\ell - 3$. De ce fait, pour $\ell - 1 \leq s \leq 2\ell - 3$, la classe $\overline{\omega_{i,\ell-1}}^s$ est nulle, et donc $\omega_{i,\ell-1}$ est au moins $(2\ell - 2)$ -nilpotente. □

Lemme 7.2.5 *Modulo des termes de degré de nilpotence strictement plus grand que $2\ell - 2$,*

$$Sq^{2^i} \omega_{i,\ell-1} = \alpha_{i,\ell-1} \cup \alpha_{i+1,\ell-1} \quad .$$

Démonstration.

On a :

$$Sq^{2^i}(\alpha_{i,\ell} \otimes \alpha_{i,\ell}) = (Sq^{2^i} \alpha_{i,\ell}) \otimes \alpha_{i,\ell} + \alpha_{i,\ell} \otimes (Sq^{2^i} \alpha_{i,\ell}) = \alpha_{i+1,\ell} \otimes \alpha_{i,\ell} + \alpha_{i,\ell} \otimes \alpha_{i+1,\ell} \quad .$$

Or $\alpha_{i+1,\ell} \otimes \alpha_{i,\ell} + \alpha_{i,\ell} \otimes \alpha_{i+1,\ell}$ est un cycle permanent et qui n'est jamais l'image d'une différentielle (pour des raisons de nilpotence, comme précédemment), détecte $\alpha_{i+1,\ell-1} \cup \alpha_{i,\ell-1}$.

Ceci montre que la différence $z = Sq^{2^i} \omega_{i,\ell-1} - \alpha_{i,\ell-1} \cup \alpha_{i+1,\ell-1}$ vit dans $F_{-1} H^*\Omega^{d-l+1} X$.

Les classes $Sq^{2^i} \omega_{i,\ell-1}$ et $\alpha_{i,\ell-1} \cup \alpha_{i+1,\ell-1}$ sont au moins $(2\ell - 2)$ -nilpotentes.

On note $\overline{Sq^{2^i} \omega_{i,\ell-1}}$ et $\overline{\alpha_{i,\ell-1} \cup \alpha_{i+1,\ell-1}}$ l'image respective de ces classes dans $\bar{R}_{2\ell-2} H^* \Omega^{d-l+1} X$.

On a une suite exacte :

$$\{0\} \longrightarrow F_{-1} H^* \Omega^{d-l+1} X \longrightarrow F_{-2} H^* \Omega^{d-l+1} X \longrightarrow \Sigma^{-2} E_{\infty}^{-2,*} \longrightarrow \{0\}$$

qui induit un complexe :

$$\begin{aligned} \{0\} &\longrightarrow \bar{R}_{2\ell-2} F_{-1} H^* \Omega^{d-l+1} X \\ &\longrightarrow \bar{R}_{2\ell-2} F_{-2} H^* \Omega^{d-l+1} X \longrightarrow \bar{R}_{2\ell-2} \Sigma^{-2} E_{\infty}^{-2,*} \longrightarrow \{0\} \end{aligned}$$

dont les propriétés d'exactitude sont données par la proposition 4.1.7.

Comme la différence

$$\bar{z} = \overline{Sq^{2^i} \omega_{i,\ell-1}} - \overline{\alpha_{i,\ell-1} \cup \alpha_{i+1,\ell-1}}$$

est d'image nulle dans $\bar{R}_{2\ell-2} \Sigma^{-2} E_{\infty}^{-2,*}$, la proposition 4.1.7 montre que pour un entier c , $Sq_0^c \bar{z}$ provient de $\bar{R}_{2\ell-2} F_{-1} H^* \Omega^{d-l+1} X$. Or d'après le corollaire 4.2.3, on a un monomorphisme

$$\bar{R}_{2\ell-1} \bar{H}^* \Omega^{d-\ell} X \hookrightarrow \bar{R}_{2\ell-2} \bar{H}^* \Omega^{d-l+1} X$$

qui est un F -épimorphisme.

Or $\bar{R}_{2\ell-1} \bar{H}^* \Omega^{d-\ell} X$ est dans \mathcal{U}_1 . Ce qui montre que $\bar{R}_{2\ell-1} \bar{H}^* \Omega^{d-\ell} X$ est de poids inférieur ou égal à 1.

Comme \bar{z} est en degré $2^i + 2^{i+1}$, et $Sq_0^c \bar{z}$ est en degré $2^c(2^i + 2^{i+1})$. Donc, par définition du poids, $Sq_0^c \bar{z}$ est nul, et comme $\bar{R}_{2\ell-1} \bar{H}^* \Omega^{d-l+1} X$ est réduit, \bar{z} est lui même nul. Ceci montre le lemme. \square

On remarque alors que :

1. la relation $Sq^{2^i} Sq^{2^i} \omega_{i,\ell-1} = \alpha_{i+1,\ell-1} \cup \alpha_{i+1,\ell-1}$, est vraie *modulo* des termes de degré de nilpotence strictement plus grand que $2\ell - 2$,
2. l'image $\overline{Sq^{2^i} Sq^{2^i} \omega_{i,\ell-1}}$ de $Sq^{2^i} Sq^{2^i} \omega_{i,\ell-1}$ dans $\bar{R}_{2\ell-2} H^* \Omega^{d-l+1} X$ est nulle.

Le deuxième point provient du résultat suivant [53, lemme 5.7, p. 554] :

Lemme 7.2.6 *Pour tout entier $n > 0$*

$$Sq^{2^n} Sq^{2^n} \in \bar{\mathcal{A}}(n) Sq^{2^n} \bar{\mathcal{A}}(n)$$

où $\mathcal{A}(n)$ est la sous-algèbre engendrée par $\{Sq^{2^i}, 0 \leq i \leq n-1\}$, et $\bar{\mathcal{A}}(n)$ est l'idéal des éléments strictement positifs de $\mathcal{A}(n)$.

Cette décomposition de l'opération de Steenrod $Sq^{2^i} Sq^{2^i}$ qui montre que $\overline{Sq^{2^i} Sq^{2^i} \omega_{i,\ell-1}}$ est de poids supérieur à 3, alors que $\bar{R}_{2\ell-2} H^* \Omega^{d-l+1} X$ est dans \mathcal{U}_2 .

Ceci montre que $\alpha_{i+1,\ell-1} \cup \alpha_{i+1,\ell-1}$ est au moins $(2\ell - 1)$ -nilpotent. Le fait que $\alpha_{i+1,\ell-1} \cup \alpha_{i+1,\ell-1}$ est $(2\ell - 2)$ -nilpotent montre qu'il existe un entier c tel que

$$0 = Sq_{2d-2}^c(\alpha_{i+1,\ell-1} \cup \alpha_{i+1,\ell-1}) = \alpha_{i+d+1,\ell-1} \cup \alpha_{i+d+1,\ell-1} \quad .$$

On peut donc choisir $i_{l+1} = i_l + c + 1$, et on aura pour tout $i \geq i_{l+1}$, $\alpha_{i,\ell-1} \cup \alpha_{i,\ell-1} = 0$

Si $\ell = 1$.

Ce cas n'est pas très différent du cas où $l > 1$. La seule restriction est que la relation du lemme 7.2.5 n'est valable que dans $F_{-2} \bar{H}^* \Omega^d X$. Le reste du raisonnement est similaire.

Le lemme 7.2.3 suffit à conclure. Pour $l = 0$, les conditions $\alpha_{i,0}$ est réduit et $\alpha_{i,0} \cup \alpha_{i,0} = 0$ sont contradictoires.

Chapitre 8

Quelques exemples de modules non-réalisables

Introduction

Dans cette section, on montre que certains complexes finis ne sont pas réalisables. En s'appuyant sur ces résultats, on montre que certaines algèbres instables ne sont pas réalisables.

Le résultat concernant les algèbres instables est peu satisfaisant, dans la mesure où la non-réalisabilité des algèbres instables évoquées repose sur la non-réalisabilité d'un squelette sur lequel la structure d'algèbre instable est quasiment triviale. Nous avertissons le lecteur que les arguments fournis dans cette section sont plutôt succints.

Je tiens à remercier M. Mahowald qui m'a indiqué la démonstration de la proposition 8.1.1. Signalons que la proposition 8.2.1 peut également être obtenue comme corollaire d'un travail de Dong Hua Jiang [27].

8.1 Le module en losange

Proposition 8.1.1 *Il n'existe pas d'espace dont la cohomologie réduite à coefficients dans \mathbb{F}_2 est concentrée en degrés $\ell, \ell + 1, \ell + 2^p, \ell + 2^p + 1$, de dimension 1 en chacun de ces degrés, et, si l'on note u le générateur en degré ℓ , $Sq^{2^p} Sq^1 u = Sq^1 Sq^{2^p} u$. On appelle module en losange et on note M le module défini ci-dessus.*

Cette proposition se démontre par l'absurde. Supposons qu'un tel espace existe. On a alors le lemme suivant.

Lemme 8.1.2 *Si le module en losange est réalisable alors la classe de Kervaire θ_i existe et satisfait à $2\theta_i = 0$ et $0 \in \langle 2\iota, \theta_i, 2\iota \rangle$.*

Rappelons qu'une classe de Kervaire θ_i est une application qui est détectée par h_{i-1}^2 dans la suite spectrale d'Adams classique convergeant vers l'homotopie stable des sphères. Le fait que la réalisabilité du module en losange implique l'existence d'une classe de Kervaire d'ordre 2 est classique, voir par exemple [34].

L'affirmation concernant le crochet de Toda $\langle 2\iota, \theta_i, 2\iota \rangle$ provient du fait suivant. Supposons que le module en losange soit la cohomologie d'un espace. Travaillons stablement et supposons que $\ell = 0$ dans la proposition précédente où M est défini. Notons M l'espace de Moore, dont la cohomologie consiste en une classe en degré zéro et une classe en degré un reliées par un Sq^1 . La réalisabilité du module en losange assure l'existence d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 S^{2^i} & \xleftarrow{\quad} & \Sigma M & \xleftarrow{\quad} & S^{2^{i-1}} & \xleftarrow{2\iota} & S^{2^{i-1}} \\
 & & \downarrow \phi & \searrow \gamma & \downarrow \theta_i & & \\
 & & M & \xrightarrow{\quad} & S^1 & & \\
 & \searrow \langle 2\iota, \theta_i, 2\iota \rangle & & & \downarrow 2\iota & & \\
 & & & & S^1 & &
 \end{array} \tag{8.1}$$

Or, d'autre part, on a le lemme suivant, qui est une conséquence de A.2.1

Lemme 8.1.3 $\eta\theta_i \in \langle 2\iota, \theta_i, 2\iota \rangle$

Ceci fournit une contradiction de la manière suivante. Puisque $\eta\theta_i \in \langle 2\iota, \theta_i, 2\iota \rangle$, $\eta\theta_i$ est divisible par 2. Par conséquent, au terme E_2 de la suite spectrale d'Adams, $h_1 h_{i-1}^2$ doit être un multiple de h_0 . Or on sait qu'en filtration d'Adams 2, il n'y a aucun élément non nul dans le même de degré que $h_1 h_{i-1}^2$.

8.2 Non réalisabilité des modules $S_\lambda F(1)$

Commençons par rappeler quelques points de la classification des objets simples de la catégorie $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$. Ils sont indexés par les partitions λ qui sont 2-régulières pour les colonnes, c'est-à-dire telles que la partition conjuguée

μ soit strictement décroissante, ou de manière équivalente, telles que $0 \leq \lambda_i - \lambda_{i+1} \leq 1$ pour tout i . Soit S_λ le foncteur simple associé à la partition λ . On renvoie à [29, 30][33, section 2], pour des détails.

Chaque simple objet simple de la catégorie $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ fournit un module instable réduit $S_\lambda F(1)$ (voir [18]). Le poids d'un tel module est fini, et le théorème 6.3.2 montre qu'il n'est pas réalisable. L'objectif est ici de démontrer ce fait par des méthodes élémentaires.

Proposition 8.2.1 *Soit S_λ un foncteur simple dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$. Alors le module instable $S_\lambda(F(1))$ n'est pas réalisable.*

indication de démonstration.

- Dans le cas où S_λ est l'identité, la non réalisabilité découle du théorème d'Adams sur l'invariant de Hopf.
- Dans le cas où $S_\lambda = S_2$, on détecte un module en losange dans $S_{(2)}(F(1))$, ce qui donne la non réalisabilité.
- Pour les $S_{(n)}$, $n \geq 3$ on voit que les deux premières opérations qui opèrent sur le générateur, qui est la classe de plus bas degré, sont Sq^{2^i} et $Sq^{2^j}Sq^{2^i}$, pour certains $i > 0$ et $j > 0$, $i \neq j$. Ceci implique l'existence d'une application entre sphères détectée par $h_i h_j$. Or ces derniers ne sont pas des cycles permanents dans la suite spectrale d'Adams.
- Pour tous les autres S_λ , la non réalisabilité suit de l'existence d'un losange à partir du générateur.

8.3 Non réalisabilité des modules $US_\lambda F(1)$

La définition du foncteur U est faite en 4.1.2. La proposition suivante découle de la section précédente, mais pas de la *strong realization conjecture*.

Proposition 8.3.1 *Soit S_λ un simple de $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$. L'algèbre instable $US_\lambda F(1)$ n'est l'algèbre instable sous-jacente à la cohomologie d'aucun espace topologique, sauf pour les cas exceptionnels de $S_{(1)} = F(1)$ et $S_{(2)}F(1) = \Lambda^2 F(1)$.*

indication de démonstration.

Les deux cas exceptionnels correspondent respectivement à la cohomologie du classifiant de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et celle de $K(\mathbb{Z}, 2)$ quotienté par son 2-squelette.

La non-réalisabilité des autres cas provient du fait que l'algèbre instable libre sur un module instable coïncide avec celui-ci dans le rang stable. Or les arguments donnés dans la section précédente concernant la non-réalisabilité des modules simples ne font intervenir que le rang stable.

Quatrième partie

Appendices

Annexe A

Topologie

A.1 Décompositions cellulaires admissibles

La démonstration des résultats suivants est disponible dans [2].

Définition A.1.1 (Décompositions cellulaires minimale) *Soit p un nombre premier. Soit X un CW -complexe ayant un nombre fini de cellules en chaque dimension. Le CW -complexe X est p -minimal si en chaque dimension, le nombre de cellules de X coïncide avec la dimension de ses groupes d'homologie à coefficients dans \mathbb{F}_p .*

Proposition A.1.2 *Soit X un CW -complexe simplement connexe ayant un nombre fini de cellules de chaque dimension. Il existe un CW -complexe p -minimal Y et une application $f : Y \rightarrow X$ induisant une équivalence en homologie modulo p .*

A.2 Crochets de Toda

A.2.1 Définition

La situation classique qui a amené H. Toda à construire ce type d'opérations secondaires est la suivante. La donnée est un diagramme d'applications entre sphères :

$$S^m \xleftarrow{\alpha} S^n \xleftarrow{\beta} S^p \xleftarrow{\gamma} S^q$$

tel que $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$ sont homotopiquement triviaux.

Le choix d'une homotopie à zéro de $\beta\gamma$ définit une application de CS^q (le cône de S^q) dans S^n et par post-composition avec α , une application de CS^q dans S^m .

Le choix d'une homotopie à zéro de $\alpha\beta$ définit une application de CS^p dans S^n . En précomposant par $CS^p \xleftarrow{C\gamma} CS^q$, on obtient une autre application de CS^q dans S^m .

Les deux applications ainsi définies se recollent correctement le long de $S^q \subset CS^q$, et donnent une application $S^{q+1} \rightarrow S^m$.

Toda a utilisé ce type d'opérations pour détecter des éléments dans l'homotopie des sphères.

A.2.2 Propriétés des crochets de Toda

Le lemme suivant est démontré dans [57, p. 18-29].

Proposition A.2.1 *Soit x une application stable qui est d'ordre deux. On peut former le crochet de Toda $\langle 2\iota, x, 2\iota \rangle$. Alors on a :*

$$\eta x \in \langle 2\iota, x, 2\iota \rangle \quad .$$

Annexe B

Calculs homotopiques

B.1 Localisations

Soit \mathcal{C} une catégorie et \mathcal{W} une classe de morphismes de \mathcal{C} .

Définition B.1.1 Une localisation de \mathcal{C} relativement à \mathcal{W} est la donnée d'une catégorie $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$ et d'un foncteur $q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$ tels que,

- pour tout morphisme m de \mathcal{C} , si m est dans \mathcal{W} alors $q(m)$ est un isomorphisme de $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$,
- pour tout foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, si $F(w)$ est un isomorphisme pour tout morphisme w de \mathcal{W} , alors il existe un unique foncteur F_q tel que F factorise sous la forme $F = F_q \circ q$.

En d'autres termes, q est initial parmi tous les foncteurs qui envoient \mathcal{W} sur des isomorphismes. L'existence d'une localisation est délicate en générale, pour des raisons ensemblistes.

Exemple.

1. Lorsque \mathcal{W} est un ensemble, par exemple, la localisation existe [20].
2. La catégorie dérivée d'une catégorie abélienne est une localisation lorsqu'elle existe.

Définition B.1.2 Une classe \mathcal{W} de morphismes d'une catégorie \mathcal{C} est dite multiplicative lorsque pour toute paire de morphismes composables (f, g) , si deux des trois morphismes f , g , et $f \circ g$ sont dans \mathcal{W} , le troisième l'est également. Les éléments de \mathcal{W} sont appelés équivalences faibles.

Dans la situation où \mathcal{W} est multiplicative dans la catégorie \mathcal{C} et que la localisation de \mathcal{C} relativement à \mathcal{W} existe, $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$ est appelée la catégorie homotopique de \mathcal{C} (relativement à \mathcal{W}), et on la note $ho(\mathcal{C})$.

B.2 Foncteurs dérivés

Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux catégories, \mathcal{W} (respectivement \mathcal{W}') une classe de morphismes de \mathcal{C} (respectivement \mathcal{C}'). On suppose que les localisations respectives de \mathcal{C} et \mathcal{C}' relativement à \mathcal{W} et \mathcal{W}' existent.

Soit F un foncteur de \mathcal{C} dans \mathcal{C}' . Lorsque F envoie tout morphisme de \mathcal{W} sur un morphisme de \mathcal{W}' , la propriété universelle assure que F induit un foncteur de $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$ dans $\mathcal{W}'^{-1}\mathcal{C}'$.

Lorsque $F(\mathcal{W})$ n'est pas dans \mathcal{W}' , on souhaite factoriser F de la meilleure façon possible. Une manière de donner sens à cela est la définition suivante.

Définition B.2.1 *Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux catégories admettant une localisation respectives relativement à des classes de morphismes \mathcal{W} et \mathcal{W}' , et soient q et q' les foncteurs de localisation respectifs. Soit F un foncteur de \mathcal{C} dans \mathcal{C}' . Lorsqu'il existe, on définit le foncteur dérivé de F comme l'extension de Kan du foncteur $q' \circ F$ le long du foncteur q .*

B.3 Calculs homotopiques

Soit \mathcal{C} une catégorie et \mathcal{W} une classe de morphismes. On suppose que sont définies deux classes auxiliaires de morphismes, les fibrations notées *fib*, et les cofibrations notées *cof*. On introduit les deux définitions suivantes :

- les *fibrations triviales* sont les morphismes qui sont à la fois dans \mathcal{W} et *fib*,
- les *cofibrations triviales* sont les morphismes qui sont à la fois dans \mathcal{C} et *cof*.

Munie de trois classes de morphismes, \mathcal{C} est appelée une catégorie de modèles si les axiomes suivants sont satisfaits.

CM1 La catégorie \mathcal{C} admet toutes les limites et colimites finies.

CM2 La classe \mathcal{W} est multiplicative.

CM3 Les classes distinguées \mathcal{W} , *fib*, et *cof* sont stables par rétractes.

CM4 Pour tout carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ V & \longrightarrow & Y \end{array} \quad (\text{B.1})$$

tel que i est dans *cof* et p dans *fib*, si p ou i est dans \mathcal{W} , alors carré

peut être complété en un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ V & \longrightarrow & Y \end{array} . \quad (\text{B.2})$$

CM5 Tout morphisme f de \mathcal{C} admet des factorisations :

- $f = p \circ i$ où p est une fibration et i une cofibration triviale,
- $f = q \circ j$ où q est une fibration triviale et j une cofibration.

Une catégorie munie d'une classe d'équivalences faibles qui font partie d'une structure de catégorie de modèles fixée est appelée *un calcul homotopique*.

Lorsqu'une classe \mathcal{W} de morphismes d'une catégorie de modèles fermée participe à un calcul homotopique, la localisation de c relativement à w existe. La notion de *calcul* est introduite ici pour souligner que ces hypothèses permettent de mettre (plus ou moins) la main sur la catégorie homotopique, qui est généralement assez mystérieuse.

B.4 Catégories de modèles simpliciales

B.4.1 Catégories simpliciales

Rappelons qu'une catégorie C est simpliciale si elle est munie d'un bifoncteur :

$$\begin{array}{ccc} C^{op} & \times & C \longrightarrow \mathcal{S} \\ X & , & Y \longmapsto \text{Hom}_C(X, Y) \end{array} ,$$

satisfaisant, pour tous objets X et Y de C ,

- il existe un isomorphisme naturel $\text{hom}_C(X, Y) \longrightarrow (\text{Hom}_C(X, Y))_0$,
- le foncteur de C dans \mathcal{S} , $Y \longmapsto \text{Hom}_C(X, Y)$ admet un adjoint à gauche $A \otimes -$ de \mathcal{S} dans C , qui est associatif dans le sens qu'il existe des isomorphismes naturels de trifoncteurs

$$((- \otimes -) \otimes -) \longrightarrow (- \otimes (- \times -)) .$$

- le foncteur de C^{op} dans \mathcal{S} , $X \longmapsto \text{Hom}_C(X, Y)$ admet un adjoint à gauche $\mathbf{hom}_C(-, Y)$ de \mathcal{S} dans C^{op} .

B.4.2 Catégories de modèles simpliciales

Soit C une catégorie munie d'une structure simpliciale et munie d'un calcul homotopique. On dit que le calcul homotopique donné est simplicial (relativement à la structure simpliciale donnée) si l'axiome de compatibilité suivant est satisfait (*cf* [23, corollary 3.12., p. 94]) :

SM7b Pour toute cofibration $j : X \longrightarrow Y$ dans C et pour tout entier n ,

$$(A \otimes \Delta^n) \cup_{(A \otimes \partial \Delta^n)} (B \otimes \partial \Delta^n) \longrightarrow (B \otimes \Delta^n)$$

est une cofibration qui est triviale si j l'est, et

$$(A \otimes \Delta^1) \cup_{(A \otimes \{e\})} (B \otimes \{e\}) \longrightarrow (B \otimes \Delta^1)$$

est une cofibration triviale pour $e \in \{0, 1\}$.

Annexe C

Pro-catégories et espaces profinis

C.1 Pro-catégories

C.1.1 Pro-catégories

Définition C.1.1 (Catégorie filtrante) *Une catégorie I est filtrante si elle vérifie :*

- *Pour tous objets i et j de I , il existe un objet $c(i, j)$ et des morphismes $i \longrightarrow c(i, j)$ et $j \longrightarrow c(i, j)$.*
- *Etant donnés deux morphismes f et g de I ayant même source i et même but j , il existe un objet c et un morphisme $\phi : j \longrightarrow c$, qui égalise f et g , i.e. tel que $\phi i = \phi j$.*

Une catégorie est cofiltrante si sa catégorie opposée est filtrante.

Un pro-objet à valeurs dans une catégorie \mathbf{C} est la donnée d'une catégorie petite et cofiltrante I , et d'un foncteur $I \longrightarrow \mathbf{C}$.

Définition C.1.2 *Etant donnée une catégorie \mathbf{C} , on peut construire une catégorie $\text{pro-}\mathbf{C}$ comme suit. Les objets en sont les pro-objets à valeurs dans \mathbf{C} (la catégorie d'indexation étant variable). Les morphismes entre deux pro-objets $X(-)$ et $Y(-)$, dont les catégories d'indexation sont I et J respectivement sont donnés par la formule :*

$$\text{hom}((X(-), Y(-))) = \lim_{j \in J} \text{colim}_{i \in I} \text{hom}(X(i), Y(j)) \quad .$$

C.1.2 Réindexation I

Le lemme suivant est démontré dans [3, p160]. On dit qu'un diagramme est fini s'il ne comporte qu'un nombre fini d'objets et de morphismes, et on dit qu'un diagramme est sans boucle si exceptées les identités, les flèches du diagramme ont toutes une source et un but distincts.

Lemme C.1.3 (lemme de réindexation) *Soit D un diagramme fini et sans boucles dans $\text{pro-}\mathbf{C}$. A isomorphisme près dans $(\text{pro-}\mathbf{C})^D$, le diagramme D peut être représenté comme un pro-objet dans la catégorie \mathbf{C}^D .*

C.2 Ensembles profinis

C.2.1 Ensembles profinis

Notre référence en ce qui concerne les ensembles profinis est [11, 2.8, p.50-53].

Définition C.2.1 (Ensembles profinis) *Un ensemble profini est un espace topologique compact et complètement discontinu.*

Un ensemble profini est naturellement la limite de ses quotients topologiques finis discrets. Plus précisément, un quotient d'un ensemble profini X , muni de la topologie quotient est fini et discret si et seulement si la relation d'équivalence qui définit le quotient est ouverte. L'ensemble \mathcal{R} de ces relations d'équivalences est ordonné par l'inclusion. On forme ainsi un pro-objet à valeurs dans la catégorie des ensembles finis munis de la topologie discrète. On montre que la limite de ce pro-objet, muni de la topologie finale, est isomorphe à X . On obtient l'énoncé suivant.

Théorème C.2.2 *Le foncteur $\lim : \text{pro-}\mathcal{E} \rightarrow \widehat{\mathcal{E}}$ induit une équivalence de catégories dont un inverse est le foncteur qui associe à un ensemble profini X le pro-ensemble fini constitué des quotients de X par des relations d'équivalence ouvertes.*

C.2.2 Réindexation II

La proposition suivante est inspirée par un argument tiré de [45].

Proposition C.2.3 *Soit I une petite catégorie telle que*

- pour tous les objets i et j de I , l'ensemble des morphismes de i dans j est fini,*
- pour tous les objets i et j de I , l'ensemble des morphismes de i dans j est non vide.*

Tout I -diagramme d'espace profini est équivalent à pro-objet dans les I -diagrammes d'espaces finis.

Démonstration. On rappelle que le quotient topologique d'un ensemble profini S par une relation d'équivalence R est fini si et seulement si la relation d'équivalence qui définit le quotient est ouverte au sens où son graphe est ouvert dans $X \times X$.

Soit I une catégorie vérifiant les hypothèses de la proposition et soit $S(-)$ un I -diagramme d'ensembles profinis. Considérons l'ensemble \mathcal{R} des I -diagrammes de relations d'équivalences $R(-)$ ouvertes sur le I -diagramme $S(-) \times S(-)$, qu'on ordonne par l'inclusion. On obtient ainsi un pro-objet dans les ensembles finis $R(-) \longrightarrow S(-)/R(-)$ fonctoriellement associé à $S(-)$.

Soient i un objet de I et R une relation d'équivalence ouverte sur I . Soit j un objet de J , la relation d'équivalence R définit une relation d'équivalence $R(j)$ ouverte sur $S(j)$ comme l'intersection des images réciproques de R par les morphismes de $j \longrightarrow i$. Comme cet ensemble est non vide et fini, on définit ainsi une relation d'équivalence ouverte non vide sur $S(j)$. On définit $R(i) = R$. Par construction, on obtient un I -diagramme $S(-)/R(-)$ d'ensembles finis.

Ceci montre que pour chaque i dans I , la limite sur $R(i)$ du pro-objet $S(i)/R(i)$ est isomorphe à $S(i)$, et donc que le I -diagramme limite du pro-objet $S(-)/R(-)$ est isomorphe à $S(-)$

□

Exemple.

- Si I satisfait aux hypothèses du lemme, il en est de même pour sa catégorie opposée I^{op} .
- La catégorie simpliciale Δ satisfait les hypothèses du lemme.
- Tout produit fini de catégories qui satisfont aux hypothèses de la proposition satisfait à son tour aux hypothèses de la proposition.
- Pour tout espace (profini) X , la catégorie des simplexes de X satisfait aux hypothèses du lemme.

Définition C.2.4 (catégories admissibles) On appelle catégorie admissible toute catégorie qui est un produit fini de catégories I du type suivant :

- I est une catégorie finie et sans boucle,
- I est telle que pour tous les objets i et j de I , l'ensemble des morphismes de i dans j est fini, et pour tous les objets i et j de I , l'ensemble des morphismes de i dans j est non vide.

Proposition C.2.5 *Soit I une catégorie admissible. Tout I diagramme d'ensembles profinis est naturellement isomorphe à la limite d'un pro-objet dans les I -diagrammes d'ensembles finis.*

Démonstration. Elle découle des lemmes C.1.3 et C.2.3. □

C.3 Espaces profinis

C.3.1 Pro-ensembles finis simpliciaux

Un pro-ensemble fini simplicial est un pro-objet (voir C.1.2 p. 115) dans la catégorie des ensembles finis simpliciaux, c'est-à-dire la donnée d'une petite catégorie cofiltrante I et d'un foncteur de I dans la catégorie \mathcal{S}_f des ensembles finis simpliciaux.

Avertissement. *Par ensemble fini simplicial, on entend objet simplicial dans la catégorie des ensembles finis, et non ensemble simplicial ayant un nombre fini de simplexes non dégénérés (ce qui est nettement plus restrictif).*

C.3.2 Espaces profinis

D'après le théorème C.2.2 p. 116, on a une équivalence de catégories entre les objets simpliciaux à valeur dans les ensembles profinis, et les objets simpliciaux à valeurs dans les pro-ensembles finis, le foncteur $\lim : \text{pro-}\mathcal{S}_f \rightarrow \widehat{\mathcal{S}}$ factorise par la catégorie $\widehat{\mathcal{S}}$ des *espaces profinis*, i.e. des ensembles profinis simpliciaux et des applications simpliciales continues. On peut se demander si ce foncteur induit une équivalence de catégories, ce qui revient à se poser la question de savoir si, étant donné un objet simplicial dans les ensembles profinis, on peut le représenter en chaque degré simplicial comme un pro-ensemble fini avec la même catégorie d'indexation.

C'est vrai, pour la raison suivante. Tout objet X de $\widehat{\mathcal{S}}$ est naturellement la limite d'un objet de $\text{pro-}\mathcal{S}_f$. Soit \mathcal{R}_X l'ensemble filtrant (ordonné par l'inclusion) des relations d'équivalence simpliciales ouvertes sur X , alors $X = \lim_{R \in \mathcal{R}_X} (X/R)$. On a le résultat suivant :

Proposition C.3.1 *Le foncteur \lim induit une équivalence de catégories entre $\text{pro-}\mathcal{S}_f$ et $\widehat{\mathcal{S}}$, dont l'inverse est donné par le foncteur*

$$X \longrightarrow \{X/R, R \in \mathcal{R}_X\} \quad ,$$

\mathcal{R}_X décrivant l'ensemble des relations d'équivalences simpliciales ouvertes sur X , ordonné par l'inclusion.

Lorsqu'un pro-ensemble fini simplicial a pour limite un espace profini donné, on dit qu'il *représente* cet espace profini. La proposition précédente affirme que tous les pro-ensembles finis simpliciaux représentant le même espace profini sont pro-isomorphes.

C.3.3 Limites et colimites dans $\widehat{\mathcal{S}}$

Nous aurons besoin de savoir que $\widehat{\mathcal{S}}$ est complète et cocomplète, afin de définir des limites et des colimites homotopiques en toute généralité, *i.e.* pour des diagrammes quelconques. Ceci est une conséquence directe de [3, appendix, §4].

Proposition C.3.2 *La catégorie $\widehat{\mathcal{S}}$ est complète et cocomplète*

Démonstration.

Le fait que $\widehat{\mathcal{S}}$ est complète provient des deux observations suivantes :

- pour toute catégorie C les limites finies sont tautologiquement définies dans $\text{pro-}C$,
- La catégorie \mathcal{S}_f admet des égalisateurs.

En effet, la première observation montre que $\widehat{\mathcal{S}}$ admet des produits quelconques, et la seconde observation montre que $\widehat{\mathcal{S}}$ admet des égalisateurs. Ces deux conditions sont équivalentes à l'existence de limites quelconques [37, V.2, p.112-113].

Le fait que $\widehat{\mathcal{S}}$ est cocomplète est plus délicat et certainement plus mystérieux.

Proposition C.3.3 [3, proposition 4.3, p. 164] *Si C est une petite catégorie qui admet toutes les limites finies, alors $\text{pro-}C$ admet toutes les colimites.*

La catégorie \mathcal{S}_f n'est pas petite, mais est équivalente à une petite catégorie.

□

C.3.4 Le calcul homotopique de $\widehat{\mathcal{S}}$ est simplicial

Nous détaillons ici le fait que le calcul homotopique de $\widehat{\mathcal{S}}$ est *simplicial*, car c'est un point crucial pour notre travail. Le fait que le calcul homotopique de $\widehat{\mathcal{S}}$ est simplicial est signalé dans [40, remarque 2], p. 359], et esquissé dans [22].

La catégorie $\widehat{\mathcal{S}}$ est simpliciale

Soit K un objet de \mathcal{S}_f , *i.e.* un ensemble fini simplicial. K est en particulier un espace profini avec la topologie discrète. Pour tous espaces profinis X et Y , les espaces $\text{hom}_{\widehat{\mathcal{S}}}(K, X)$ et $X \times K$ sont naturellement profinis, et on peut définir un ensemble simplicial $\text{Map}(X, Y)$, dont l'ensemble des simplexes de degré n est $\text{Map}(X, Y)_n = \text{hom}_{\widehat{\mathcal{S}}}(X \times \Delta_n, Y)$. On peut vérifier que ces définitions, restreintes à \mathcal{S}_f , vérifient les différentes adjonctions [44, II, § 1 et 2] qui définissent une structure de catégorie de modèle simpliciale. On prolonge alors ces notions à tout les ensembles simpliciaux K de la manière suivante. K est colimite filtrante de ses sous-ensembles simpliciaux finis $\{K_\alpha\}$. Rappelons que $\widehat{\mathcal{S}}$ est complète et cocomplète. De ce fait, on peut définir $X \times K$ comme colimite filtrante des $X \times K_\alpha$, $\text{hom}(K, X) = \lim_\alpha \text{hom}_{\widehat{\mathcal{S}}}(K_\alpha, X)$. Les adjonctions sont bien vérifiées.

L'axiome **SM7b** est vérifié dans le cas qui nous concerne, à savoir quand $C = \widehat{\mathcal{S}}$ munie de la structure simpliciale définie ci-avant et du calcul homotopique qu'on s'est fixé. On utilise pour cela la suite exacte longue de Mayer-Vietoris en cohomologie continue.

La suite exacte longue de Mayer-Vietoris

On suppose donné un diagramme cocartésien dans $\widehat{\mathcal{S}}$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_1} & B \\ i_2 \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & D \end{array} \quad (\text{C.1})$$

tel que i_1 est une cofibration.

Comme pour tout espace profini, le complexe des cochaînes continues est $C^*X = \text{hom}_{\widehat{\mathcal{S}}}(X, \mathbb{F}_p)$, on obtient un diagramme cartésien de groupes abéliens cosimpliciaux :

$$\begin{array}{ccc} C^*D & \longrightarrow & C^*B \\ \downarrow & & \downarrow C^*i_1 \\ C^*C & \xrightarrow{C^*i_2} & C^*A \end{array} \quad , \quad (\text{C.2})$$

avec C^*i_1 est un épimorphisme.

La normalisation étant un adjoint à droite, elle préserve aussi les carrés cartésiens et les épimorphismes. On obtient un diagramme cartésien de

complexes de cochaînes :

$$\begin{array}{ccc} N^*C^*D & \longrightarrow & N^*C^*B \\ \downarrow & & \downarrow N^*C^*i_1 \\ N^*C^*C & \longrightarrow & N^*C^*A \end{array} . \quad (C.3)$$

avec $N^*C^*i_1$ est un épimorphisme.

La catégorie de complexes de cochaînes étant abélienne, ceci est équivalent au fait que la diagramme :

$$N^*C^*D \longrightarrow N^*C^*B \oplus N^*C^*C \longrightarrow N^*C^*A$$

est un diagramme égalisateur, ou encore que la suite de complexe :

$$N^*C^*D \longrightarrow N^*C^*B \oplus N^*C^*C \longrightarrow N^*C^*A$$

est exacte. Il s'en suit qu'on a une suite exacte longue en cohomologie, qui est naturelle par construction.

Démonstration de l'axiome SM7b pour $\hat{\mathcal{S}}$

Le fait que les morphismes

$$(A \otimes \Delta^n) \cup_{(A \otimes \partial \Delta^n)} (B \otimes \partial \Delta^n) \longrightarrow (B \otimes \Delta^n)$$

et

$$(A \otimes \Delta^1) \cup_{(A \otimes \{e\})} (B \otimes \{e\}) \longrightarrow (B \otimes \Delta^1)$$

sont des cofibrations est explicite.

Pour le reste, on applique la suite de Mayer-Vietoris.

C.3.5 Remplacement d'un morphisme par une fibration

Ce paragraphe est extrait de [10] et a été rédigé par F.-X. Dehon.

On y démontre comment le fait que le calcul homotopique de $\hat{\mathcal{S}}$ est simplicial permet d'obtenir les factorisations de l'axiome **CM5** (voir B.3, p. 112) fonctoriellement.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme quelconque de $\hat{\mathcal{S}}$. La proposition 1.1.6 p. 22 assure que f est naturellement faiblement équivalent à un diagramme filtrant de morphismes entre p -espaces finis $f(-)$ indexé par une catégorie I .

Considérons le morphisme

$$\mathbf{hom}(\Delta[1], RY) \longrightarrow RY$$

induit par s_0 . Comme s_0 est une cofibration triviale, $\mathbf{Hom}(\Delta[1], RY) \longrightarrow RY$ est une fibration triviale. Notons $X^{\Delta[1]}$ l'espace profini $\mathbf{Hom}(\Delta[1], X)$. Les applications $X \longrightarrow X^{\Delta[1]}$ et $X^{\Delta[1]} \longrightarrow X \times X$ induites par $d^0, d^1 : \Delta[0] \longrightarrow \Delta[1]$ et $s^0 : \Delta[1] \longrightarrow \Delta[0]$ font de $X^{\Delta[1]}$ un espace de chemins pour X dans $\widehat{\mathcal{S}}$, fonctoriel en X . (On pourra se convaincre de ce que l'application $X \longrightarrow X^{\Delta[1]}$ est une équivalence faible en lisant la démonstration de la proposition qui suit). Tout morphisme $X \longrightarrow Y$ entre espace profini s'écrit comme la composée des applications $X \longrightarrow X \times_{Y\{0\}} Y^{\Delta[1]}$ et $X \times_{Y\{0\}} Y^{\Delta[1]} \longrightarrow Y^{\{1\}}$.

Le lemme suivant est classique pour une catégorie de modèles fermée simpliciale et cruciale pour notre propos :

Lemme C.3.4 *Soit $X \longrightarrow Y$ un morphisme entre espaces profinis; alors :*

- *L'application $X \longrightarrow X \times_{Y\{0\}} Y^{\Delta[1]}$ est une équivalence faible de $\widehat{\mathcal{S}}$.*
- *L'application $X \times_{Y\{0\}} Y^{\Delta[1]} \longrightarrow Y^{\{1\}}$ est une fibration de $\widehat{\mathcal{S}}$ si Y est fibrant.*

Démonstration du lemme. La démonstration du premier point est analogue à celle de la proposition 5 de [44, II, § 2] : Il existe une homotopie simpliciale de la composée $d^1 s^0 : \Delta[1] \longrightarrow \Delta[1]$ à l'identité de $\Delta[1]$ relativement à d^1 , c'est à dire une application $\Delta[1] \times \Delta[1] \longrightarrow \Delta[1]$ dont la restriction à $\Delta[1] \times \{0\}$ coïncide avec la composée $\Delta[1] \longrightarrow \{0\} \longrightarrow \Delta[1]$, dont la restriction à $\Delta[1] \times \{1\}$ coïncide avec $\text{Id}_{\Delta[1]}$ et dont la restriction à $\{0\} \times \Delta[1]$ se factorise par la projection $\{0\} \times \Delta[1] \longrightarrow \{0\} \times \{0\}$. On en déduit que l'application $X \times_{Y\{0\}} Y^{\{0\}} \longrightarrow X \times_{Y\{0\}} Y^{\Delta[1]}$ est une équivalence d'homotopie. Or le fait que $X \times \Delta[1]$ soit un objet cylindre pour X implique qu'une équivalence d'homotopie est une équivalence faible.

Pour le deuxième point supposons Y fibrant ; alors l'application $Y^{\Delta[1]} \longrightarrow Y^{\{0,1\}}$ est une fibration dans $\widehat{\mathcal{S}}$. On en déduit que l'application $X \times_{Y\{0\}} Y^{\Delta[1]} \longrightarrow X \times_{Y\{0\}} Y^{\{0,1\}} \simeq X \times Y^{\{1\}}$ est une fibration. Maintenant si X est fibrant alors la projection $X \times Y \longrightarrow Y$ est une fibration. Ceci achève la démonstration du lemme.

Pour tout objet i de la catégorie I , $X(i) \times_{Y(i)\{0\}} Y(i)^{\Delta[1]} \longrightarrow Y(i)^{\{1\}}$ est une fibration entre p -espaces finis. Par commutation des limites entre elles, la limite sur I de ces morphismes est $X \times_{Y\{0\}} Y^{\Delta[1]} \longrightarrow Y^{\{1\}}$.

C.4 Cohomologies des espaces profinis

C.4.1 Cohomologie continue

On peut définir la cohomologie continue à coefficients dans \mathbb{F}_p d'un espace profini X .

Définition C.4.1 (cohomologie continue) *La cohomologie continue de X à coefficients dans \mathbb{F}_p est la cohomologie du complexe des cochaînes continues de X à valeurs dans l'anneau discret \mathbb{F}_p .*

Soit X un espace profini, $X(-)$ un objet de $\text{pro-}\mathcal{S}_f$ indexé par I qui représente X . On l'isomorphisme suivant :

$$H^*X = \text{colim}_{i \in I} H^*X(i), \quad (\text{C.4})$$

où $H^*X(i)$ désigne la cohomologie ordinaire de $X(i)$ à coefficients dans \mathbb{F}_p . Comme la colimite considérée est *filtrante*, $\text{colim}_{i \in I} H^*X(i)$ est naturellement munie d'une structure d'algèbre instable. La proposition C.3.1 p. 118, assure que cette structure ne dépend pas du diagramme représentant X .

Remarque C.4.2 *Nous désignons volontairement par un même symbole la cohomologie d'un espace et la cohomologie continue d'un espace profini car ces deux notions coïncident lorsqu'elles font sens en même temps, c'est-à-dire pour les ensembles finis simpliciaux. De même, on parlera de la cohomologie d'un espace profini, en omettant l'épithète continue.*

C.4.2 Complétion profinie

Le foncteur *oubli de la topologie* $|-|$ de $\widehat{\mathcal{S}}$ dans \mathcal{S} admet un adjoint à gauche, qu'on appelle complétion profinie. Le complété profini d'un ensemble simplicial X est noté \widehat{X} . Explicitement, soit \mathcal{R} l'ensemble ordonné par l'inclusion des relations simpliciales sur X telles que le quotient X/R est fini. Alors $\widehat{X} = \lim_{R \in \mathcal{R}} (X/R)$.

Les applications quotient $X \rightarrow X/R$ induisent un morphisme naturel

$$X \longrightarrow \widehat{X}$$

Proposition C.4.3 *La flèche naturelle $X \rightarrow \widehat{X}$ induit un isomorphisme d'algèbres instables entre $H^*\widehat{X}$ et H^*X .*

Remarque C.4.4 *Un module instable ou une algèbre instable réalisable comme cohomologie d'un espace est également réalisable comme cohomologie continue d'un espace profini.*

C.4.3 Coefficients locaux

Soit X un espace profini. Soit $X(-)$ un diagramme d'espace finis indexé par une catégorie cofiltrante I qui représente X (*i.e.* la limite du diagramme $X(-)$ est isomorphe à X). On rappelle que la catégorie des systèmes de coefficients locaux sur un espace Y est de manière équivalente :

- la catégorie des modules sur le groupoïde fondamental de Y ,
- la catégorie des foncteurs contravariants de la catégorie de simplexes de X à valeurs dans les groupes abéliens.

Un système de coefficients locaux sur X est la donnée pour chaque i de I d'un système de coefficients locaux $M(i)$ sur $X(i)$ et pour tout morphisme $i \rightarrow j$ de la catégorie I , de transformations naturelles entre $M(i)$ et $(i \rightarrow j)^* M(j)$. Avec cette structure, les groupes de *cohomologie* à coefficients locaux $H^*(X(i), M(i))$ sont organisés comme un système filtrant de groupes abéliens.

Par définition, étant donné un espace profini X , un diagramme d'espace finis simpliciaux $X(-)$ qui le représente et un système de coefficients locaux $M = M(-)$ comme défini ci-avant, la cohomologie de X dans le système de coefficients locaux M , notée $H^*(X, M)$ est la colimite des groupes abéliens $H^*(X(i), M(i))$.

C.4.4 Connexité d'un espace profini

On remarque dans cette section que la notion de connexité d'un espace profini fait sens et coïncide avec la notion de connexité de l'ensemble simplicial sous-jacent. La proposition suivante est [9, proposition 1.1.3 et scholie 1.1.4].

Lemme C.4.5 *Soit $X(-)$ un $pro-p$ -espace fini. Alors l'ensemble des composantes connexes de $\lim X(-)$ est la limite inverse des composantes connexes des $X(i)$, et $H^0 X$ s'identifie naturellement à l'espace de applications continues de l'ensemble des composantes connexes de X dans \mathbb{F}_p .*

En particulier, on dira qu'un espace profini X est connexe (respectivement a un nombre fini de composantes connexes) si $H^0 X$ est de dimension 1 (si $H^0 X$ respectivement est de dimension finie).

C.5 Espaces profinis cosimpliciaux

C.5.1 Définition

On rappelle que la catégorie simpliciale Δ est la catégorie dont les objets sont les ensembles ordonnés $\{0, 1, \dots, n\}$, n décrivant l'ensemble des entiers naturels ; les morphismes sont les applications croissantes.

Définition C.5.1 *Un espace profini cosimplicial est un foncteur de la catégorie simpliciale Δ dans $\widehat{\mathcal{S}}$, et un morphisme d'espaces cosimpliciaux est une transformation naturelle entre deux tels foncteurs. Etant donné que la catégorie Δ est petite, les espaces cosimpliciaux et leurs morphismes forment une catégorie.*

C.5.2 Structure de Reedy

La catégorie des espaces profinis cosimpliciaux est munie d'une structure de catégorie de modèles, la structure de Reedy (voir [23]).

Théorème C.5.2 *Les notions suivantes définissent un calcul homotopique sur $c\widehat{\mathcal{S}}$.*

- *Les équivalences faibles sont les équivalences codegré par codegré.*
- *Les cofibrations sont les monomorphismes qui induisent un isomorphisme sur les augmentations maximales.*
- *Les fibrations sont définies par la propriété de relèvement.*

C.5.3 Propriétés

Les deux propositions suivantes sont des conséquences de ce que le calcul homotopique de $\widehat{\mathcal{S}}$ est simplicial et propre, comme on l'a démontré dans le premier chapitre de la première partie.

Proposition C.5.3 *Le calcul homotopique de Reedy de $c\widehat{\mathcal{S}}$ est simplicial.*

Proposition C.5.4 *Le calcul homotopique de Reedy de $c\widehat{\mathcal{S}}$ est propre.*

C.5.4 Réalisation

Le foncteur c qui fait correspondre à un espace profini X l'espace cosimplicial égal à $X \times \Delta[-]$ admet un adjoint à droite Tot la réalisation géométrique. Comme c préserve cofibrations et cofibrations triviales, Tot préserve à son tour fibrations et fibrations triviales. On obtient ainsi formellement une paire d'adjoint de foncteurs dérivés.

C.6 Quasi-groupes abéliens profinis simpliciaux cosimpliciaux

Proposition C.6.1 *Tout épimorphisme de quasi-groupes abéliens profinis simpliciaux cosimpliciaux est une fibration au sens de Reedy.*

Démonstration de la proposition C.6.1. Soit $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ un morphisme d'espaces profinis cosimpliciaux. Par définition, f^\bullet est une fibration si pour tout n , l'application induite $X^{n+1} \longrightarrow M^n X \times_{M^n Y} Y^{n+1}$ est une fibration (voir [23, chapter VII] ou [5] pour la définition de M^n). En l'occurrence, l'application induite est un morphisme de groupes abéliens simpliciaux, il s'agit donc de montrer que ce morphisme est un épimorphisme.

On va commencer par montrer que tout quasi-groupe simplicial cosimplicial est fibrant.

Proposition C.6.2 *Tout quasi-groupe simplicial cosimplicial est fibrant au sens de Reedy.*

Démonstration de la proposition C.6.2. Soit X^\bullet un quasi-groupe simplicial cosimplicial (profini). Pour tout entier n , le n -ième espace de recollement de X^\bullet , noté $M^n X^\bullet$, est le sous-espace qui en chaque degré simplicial est constitué des $(n+1)$ -uplets (x_0, x_1, \dots, x_n) de $(X^n)^{\times(n+1)}$ qui satisfont aux conditions de recollement :

$$s^j x_i = s^{i-1} x_j \quad \text{pour } n \geq i > j \geq 0$$

On rappelle que X^\bullet est fibrant au sens de Reedy si pour tout entier $n \geq 1$, le morphisme canonique

$$s_X = \prod_{i=0}^n s^i : X^{n+1} \longrightarrow M^n X^\bullet$$

est une fibration de $\mathcal{S}(\widehat{\mathcal{S}})$.

La définition d'un quasi-groupe simplicial cosimplicial assure que s_X est un morphisme de groupes simpliciaux (profinis). Il suffit donc de montrer que pour tout n , le morphisme s_X est un épimorphisme.

Soit $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ un élément de $M^n X^\bullet$. Posons

$$\omega_o(x) = d^1 x_0 \tag{C.5}$$

Et définissons récursivement, pour tout $n \geq j \geq 1$:

$$\omega_j(x) = (d^{j+1} x_j) (d^{j+1} s^j \omega_{j-1}(x))^{-1} (\omega_{j-1}(x)) \tag{C.6}$$

Avertissement. Afin d'alléger les notations, on note ω_i au lieu de $\omega_i(x)$, lorsque cela ne prête pas à confusion.

Tous les calculs reposent sur le lemme de suivant.

Lemme. Soit $j \geq 1$.

– Pour $i \leq j - 1$,

$$s^i(d^{j+1}s^j\omega_{j-1}) = s^i d^{i+1}x_j \quad (\text{C.7})$$

– pour $i \leq j$,

$$s^i\omega_j = x_i \quad (\text{C.8})$$

Ce lemme se démontre par récurrence sur j .

Commençons par remarquer que pour $j = 0$, on a

$$s^0\omega_0 = s^0 d^1 x_0 = x_0 \quad (\text{C.9})$$

d'après la relation cosimpliciale $s^i d^{i+1} = id$.

Initialisons la récurrence à $j = 1$. On calcule :

$$\begin{aligned} s^0(d^2 s^1 \omega_0) &= d^1 s^0 s^0 \omega_0 \quad \text{car } s^i d^j = d^{j-1} s^i \text{ pour } j > i + 1 \\ &= d^1 s^0 x_0 \quad \text{car } s^0 \omega_0 = x_0 \end{aligned}$$

Or, d'après les conditions de recollement, on a la relation $s^0 x_0 = s^0 x_1$, donc

$$\begin{aligned} s^0(d^2 s^1 \omega_0) &= d^1 s^0 x_1 \\ &= s^0 d^2 x_1 \end{aligned}$$

Ceci montre la première partie de l'énoncé au rang 0.

Démontrons la seconde partie de l'énoncé au rang 0.

(i) pour $i = 0$.

$$\begin{aligned} s^0\omega_1 &= s^0(d^2 x_1 (d^2 s^1 \omega_0)^{-1} \omega_0) \\ &= (s^0 d^2 x_1) (s^0 (d^2 s^1 \omega_0)^{-1}) (s^0 \omega_0) \end{aligned}$$

Or $s^0\omega_0 = x_0$, donc

$$s^0\omega_2 = s^0(d^2 x_1) (s^0 (d^2 x_1)^{-1}) (s^0 \omega_0) = x_0$$

(ii) pour $i = 1$, le résultat suit du calcul suivant :

$$\begin{aligned} s^1 \omega_1 &= s^1(d^2 x_1 (d^2 s^1 \omega_0)^{-1} \omega_0) \\ &= s^1(d^2 x_1) (s^1(d^2 \omega_0)^{-1}) (s^1 \omega_0) \\ &= x_1 \end{aligned}$$

Ceci démontre l'énoncé au rang 0.

Supposons l'énoncé vrai au rang $j - 1$. pour $i < j$, on calcule :

$$\begin{aligned} s^i(d^{j+1} s^j \omega_j) &= d^j s^i s^j \omega_j \\ &= d^j s^{j-1} s^i \omega_j \\ &= d^j s^{j-1} x_i \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence. D'autre part, d'après les conditions de recollement, $s^{j-1} x_i = s^i x_j$, donc

$$\begin{aligned} s^i(d^{j+1} s^j \omega_j) &= d^j s^i x_j \\ &= s^i d^{j+1} x_j \end{aligned}$$

Ce qui démontre le premier point du lemme à l'ordre j .

Le second point se montre de la manière suivante.

(i) pour $i < j$, on a

$$\begin{aligned} s^i \omega_j &= s^i(d^{j+1} x_j (d^{j+1} s^j \omega_{j-1})^{-1} \omega_{j-1}) \\ &= (s^i d^{j+1} x_j) (s^i (d^{j+1} s^j \omega_{j-1})^{-1}) (s^i \omega_{j-1}) \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$s^i \omega_j = s^i(d^{j+1} x_j) (s^i (d^{j+1} x_j))^{-1} (s^i \omega_{j-1}) = (s^i \omega_{j-1}) = x_i$$

(ii) pour $i = j$, le résultat suit du calcul suivant :

$$\begin{aligned} s^j \omega_j &= s^j(d^{j+1} x_j (d^{j+1} s^j \omega_{j-1})^{-1} \omega_{j-1}) \\ &= s^j(d^{j+1} x_j) (s^j (d^{j+1} \omega_{j-1})^{-1}) (s^j \omega_{j-1}) \\ &= x_j \end{aligned}$$

Par récurrence, ceci démontre l'énoncé pour tout $i \leq n$. □

On achève la démonstration de la proposition C.6.2 en notant que pour $j = n$, l'élément ω_n satisfait $s_X \omega_n = x$, ce qui montre que s_X est un épimorphisme, et donc une fibration.

On peut maintenant montrer que tout épimorphisme de quasi-groupes simpliciaux cosimpliciaux (profinis) est une fibration au sens de Reedy.

Démonstration de la proposition. Soit $f : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ un épimorphisme de quasi-groupes simpliciaux cosimpliciaux (profinis). Par définition, on doit montrer que pour tout entier n , les applications naturelles :

$$\phi^n : X^{n+1} \longrightarrow Y^{n+1} \times_{M^n X^\bullet} M^n Y^\bullet$$

sont des fibrations. Dans la situation où $f : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ est un morphisme de quasi-groupes simpliciaux cosimpliciaux (profinis), le morphisme ϕ^n est un morphisme de groupes simpliciaux (profinis), car sa définition ne fait pas intervenir d^0 . Il suffit donc de montrer que pour tout n , ϕ^n est un épimorphisme.

Un élément typique de $Y^{n+1} \times_{M^n X^\bullet} M^n Y^\bullet$ est une paire $(y, (x_0, \dots, x_n))$ dans $Y^{n+1} \times M^n Y^\bullet$ telle que

$$\forall i \leq n, s^i y = f(x^i) \quad (\text{C.10})$$

$$\forall 0 \leq j < i \leq n, s^j x_i = s^{i-1} x_j \quad . \quad (\text{C.11})$$

Par hypothèse, le morphisme f est un épimorphisme et donc il existe un élément z de X^{n+1} tel que $f(z) = y$. Soit $v = (v_0, \dots, v_n)$ l'élément de $M^n X^\bullet$ défini par $v_i = s^i(z)^{-1} x_i$.

La proposition C.6.2 assure que $X^{n+1} \longrightarrow M^n X^\bullet$ est un épimorphisme, et donc, les formules C.5 et C.6 définissent un élément $\omega_n(v)$ de X^{n+1} dont l'image par le morphisme canonique est v .

On a alors besoin de savoir que

Sorite C.6.3 *L'image de $\omega_i(v)$ par f est l'élément neutre de Y^{n+1} .*

Démonstration du sorite C.6.3. On procède à nouveau par récurrence sur i .

Pour $i = 0$, on a

$$\begin{aligned} f(\omega_0(v)) &= f(d^1(s^0(z))^{-1} x_0) \\ &= f(d^1(s^0(z))^{-1}) f(x_0) \\ &= (d^1 s^0 f(z))^{-1} f(x_0) \\ &= (d^1 s^0 y)^{-1} s^0 y && \text{d'après l'équation (C.10)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

La suite de cette récurrence ne pose aucune difficultés :

$$\begin{aligned}
f(\omega_i(v)) &= f(d^{j+1}v_j(d^{j+1}s^j\omega_{j-1}(v))^{-1}\omega_{j-1}(v)) \\
&= f(d^{j+1}v_j) && \text{car } f(\omega_{j-1}) = 1 \text{ par récurrence} \\
&= f((d^{j+1}s^j(z))^{-1}(d^{j+1}x_j)) \\
&= f((d^{j+1}s^j(z))^{-1})f(d^{j+1}x_j) \\
&= (d^{j+1}s^j f(z))^{-1}d^{j+1}f(x_j) \\
&= (d^{j+1}s^j y)^{-1}d^{j+1}f(x_j) \\
&= 1 && \text{d'après l'équation (C.10)}
\end{aligned}$$

Ceci finit la démonstration du sorite C.6.3. \square

Soit q l'élément de X^{n+1} défini par $q = z\omega_n(v)$. On a d'une part $s_X(q) = x$ et d'autre part $f(q) = y$. Ceci revient à dire que $\phi^n : X^{n+1} \longrightarrow Y^{n+1} \times_{M^n X^\bullet} M^n Y^\bullet$ est un épimorphisme, et donc une fibration.

Ceci achève la démonstration de la proposition C.6.1. \square

$\widehat{\mathcal{S}}$: Catégorie des espaces profinis

\mathcal{A}_p : L'algèbre de Steenrod *modulo* p

\mathcal{U} Catégorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod \mathcal{A}_2

\mathcal{K} : Catégorie des algèbres instables sur l'algèbre de Steenrod \mathcal{A}_2

\mathcal{F} : La catégorie dont les objets sont les foncteurs de source la catégorie des \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels de dimension finie et de but la catégorie de tous les \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels, et dont les morphismes sont les transformations naturelles de foncteurs

$\mathcal{N}il$: La catégorie des modules instables nilpotents

$\mathcal{U}/\mathcal{N}il$: Le quotient de la catégorie \mathcal{U} par la catégorie $\mathcal{N}il$

\mathcal{S} : La catégorie des ensembles simpliciaux

\mathcal{U}_n : Le n -ième cran de la filtration de Krull

\mathcal{S}_f : La catégorie des ensembles finis simpliciaux

\mathcal{E} : La catégorie des ensembles finis

$\widehat{\mathcal{E}}$: La catégorie des ensembles profinis

$\mathcal{N}il_s$ est la catégorie des modules sur l'algèbre de Steenrod *modulo* 2 qui sont s -nilpotents.

$w(M)$ est le poids du \mathcal{A}_2 -module M

$w(x)$ est le poids du sous-module engendré par x

$\alpha(n)$ désigne le nombre de 1 dans l'écriture diadique de l'entier n

H^*X est la cohomologie de X dans un corps fini précisé par le contexte, et X est un ensemble simplicial ou un espace profini.

ΩX est l'espace de lacets de l'espace (éventuellement profini) pointé X .

$|-|$ est le foncteur $\widehat{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ qui oublie la topologie profinie.

$\widehat{(-)}$ est le foncteur de complétion profinie $\mathcal{S} \rightarrow \widehat{\mathcal{S}}$.

U est le foncteur algèbre instable libre $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{K}$.

T est le foncteur de Lannes.

\bar{T} est le foncteur de Lannes réduit.

DV désigne le dual profini de l'espace vectoriel V .

Bibliographie

- [1] J. F. Adams, *On the non-existence of elements of Hopf invariant one*, Ann. of Math., II. Ser. 72, 20-104 (1960).
- [2] D. J. Anick, *Connections between Yoneda and Pontrjagin algebras*, Algebraic topology, Proc. Conf., Aarhus 1982, Lect. Notes Math. 1051, 331-350 (1984)
- [3] M. Artin, B. Mazur, *Etale Homotopy*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1972.
- [4] A. K. Bousfield, *On the homology spectral sequence of a cosimplicial space*, Am.J.Math. vol.109, 361-394, 1987.
- [5] A. K. Bousfield, D. M. Kan, *Homotopy limits, Completions and Localizations*, Lecture notes in mathematics, vol. 304, 1972.
- [6] J. D. Christensen, W. G. Dwyer et D. C. Isaksen, *Obstruction theory in model categories*, [http ://hopf.math.purdue.edu/new-html/cgi-interface.html](http://hopf.math.purdue.edu/new-html/cgi-interface.html)
- [7] F.-X. Dehon, *Espaces fonctionnels de source le classifiant de S^1 et de but un espace sans p -torsion*, Thèse de Doctorat de l'Université Paris 7.
- [8] F.-X. Dehon, *MU-cohomologie des espaces fonctionnels de source le classifiant d'un groupe de Lie compact commutatif*, CRM preprints, preprint 464., [http ://www.crm.es/home.htm](http://www.crm.es/home.htm)
- [9] F.-X. Dehon ; J. Lannes, *Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un groupe de Lie compact commutatif. (On functional spaces whose source is in the classifying space of a commutative compact Lie group)*, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. 89, 127-177 (1999).
- [10] F.-X. Dehon, G. Gaudens, *Espaces profinis et problèmes de réalisabilité*, [http ://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~gaudens/](http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~gaudens/)
- [11] A. Douady, *Algèbre et théories Galoisiennes*, 2ème édition revue et augmentée, Editions Cassini, (2001)

- [12] A. Dress, *Zur Spektralsequenz von Faserungen*, Invent. Math. 3, 172-178 (1967).
- [13] E. Dror (ou Dror Farjoun), *Pro-nilpotent representation of homology types*, Proc. Am. Math. Soc. 38, 657-660 (1973).
- [14] W. G. Dwyer, *Strong convergence of the Eilenberg-Moore spectral sequence*, Topology vol.13, 1974, 255-265.
- [15] W. G. Dwyer, J. Spalinski, *Homotopy theories and model categories*, *Handbook of Algebraic Topology*, edited by I. M. James, Elsevier, 1995, 73-126.
- [16] W. G. Dwyer, P. S. Hirschhorn, D. M. Kan, *Model Categories and More General Abstract Homotopy Theory*, [http ://www-math.mit.edu/ psh/#Mom](http://www-math.mit.edu/~psh/#Mom)
- [17] A. D. Elmendorf, I. Kriz, M. A. Mandell, J. P. May, *Rings, modules, and algebras in stable homotopy theory (With an appendix by M. Cole)*, Mathematical Surveys and Monographs. 47. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS)
- [18] V. Franjou, L. Schwartz, *Reduced unstable \mathcal{A} -modules and the modular representation theory of the symmetric groups*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 23 (1990).
- [19] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France, vol.90 (1962).
- [20] P. Gabriel, P. M. Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory*, (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Band 35 (English) Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag, X, 168 p. (1967).
- [21] G. Gaudens, L. Schwartz, *Sur les sous-modules instables des algèbres instables*, prépublication 2002-15, [http ://zeus.math.univ-paris13.fr/laga/prepub.html](http://zeus.math.univ-paris13.fr/laga/prepub.html)
- [22] P. G. Goerss, *Comparing Completions of a Space at a Prime*, Contemporary mathematics, vol. 200, 1998.
- [23] P. Goerss, J. Jardine, *Simplicial homotopy theory*, Progress in Mathematics vol.174, Birkhäuser, 1999.
- [24] P. Hirschhorn, *Localization of model categories*, [http ://www-math.mit.edu/~psh/](http://www-math.mit.edu/~psh/)
- [25] M. Hovey, J. Smith, B. Shipley, *Symmetric spectra*, J. of the Amer. Math. Soc. 13.(2000), 149-209 .

- [26] H. W. Henn, J. Lannes, L. Schwartz, *The categories of unstable modules and unstable algebras modulo nilpotent objects*, Am. J. of Math. (1993), Vol 115, Number 5, 1053-1106.
- [27] Dong Hua Jiang, *On the realization of the unstable modules*, (2002), <http://hopf.math.purdue.edu/new-html/cgi-interface.html>.
- [28] N. J. Kuhn, *On topologically realizing modules over the Steenrod algebra*, Annals of Mathematics, vol. 141, 1995.
- [29] N. J. Kuhn *Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra I*, Am. Journal of Math. 116 (1993), 327-360.
- [30] N. J. Kuhn *Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra II*, 327-360 ; K-Theory 8 (1994) 395-426.
- [31] J. Lannes, *Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p -groupe abélien élémentaire*, (Appendice par Michel Zisman). Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. 75, 135-244 (1992).
- [32] M. Lydakis, *Smash products and Γ -spaces*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 126, No.2, 311-328 (1999).
- [33] L. Piriou, L. Schwartz, *La filtration par le degré de la cohomologie des 2-groupes abéliens élémentaires.* , Prépublications Paris 13 22-2000.
- [34] M. Mahowald, *A new infinite family in ${}_2\pi_1^s$* , Topology 16, 249-256 (1977).
- [35] H. R. Margolis, *Spectra and the Steenrod algebra. Modules over the Steenrod algebra and the stable homotopy category*, North-Holland Mathematical Library, Vol. 29. Amsterdam - New York - Oxford : North-Holland.
- [36] J. P. May, *Simplicial objects in algebraic topology*, Van Nostrand mathematical Studies, vol. 11, 1967.
- [37] S. MacLane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, Springer , seconde édition.
- [38] H. Miller, *The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces*, Ann. Math. (2) 120, 39-87 (1984).
- [39] J. Milnor, *The Steenrod algebra and its dual*, Ann. of Math., II. Ser. 67, 150-171 (1958).
- [40] F. Morel, *Ensembles profinis simpliciaux et Interprétation géométrique du foncteur \mathbf{T}* , Bull.Soc.math.France, Vol 124, 1996, p.347-373.
- [41] F. Morel, *Cours de DEA à l'université Paris 7 (1993-1994), notes manuscrites.*

- [42] F. Morel, V. Voevodski, *A¹-homotopy theory of schemes*, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. 90, 45-143 (1999).
- [43] E. Mosher, M. Tangora, *Cohomology operations and applications in homotopy theory*, Harper's Series in Modern Mathematics. New York-Evanston-London : Harper and Row. X, 214 p. (1968).
- [44] D. G. Quillen, *Homotopical algebra, Lecture Notes in Mathematics*, vol. 43, 1967.
- [45] D. G. Quillen, *An application of simplicial profinite groups*, Comment. Math. Helv. 44, 45-60 (1969).
- [46] D. Rector, *Steenrod operations in the Eilenberg-Moore spectral sequence*, Com.mat.Helv., vol. 45, 540-552, 1970.
- [47] C. Rezk, S. Schwede, B. Shipley, *Simplicial structures on model categories and functors*, Am. J. Math. 123, No.3, 551-575 (2001).
- [48] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Lecture notes in mathematics 5, Springer, 1964.
- [49] B. E. Shipley, *Pro-isomorphisms of homology towers*, Math. Zeit. 220, No.2, 257-271, 1995.
- [50] B. E. Shipley, *Convergence of the homology spectral sequence of a co-simplicial space*, Am. J. Math. 118, No.1, 179-207, 1996.
- [51] L. Schwartz, *Unstable modules over the Steenrod algebra and the Sullivan's fix point set conjecture*, Chicago Lectures in Mathematics Series, 1994.
- [52] L. Schwartz, *A propos de la conjecture de non réalisation due a N. Kuhn*, Invent. Math., vol. 134, No 1, 211-227 (1998).
- [53] L. Schwartz, *La filtration de Krull de la catégorie \mathcal{U} et la cohomologie des espaces*, Algebraic and Geometric Topology 1, 519-548 (2001).
- [54] L. Schwartz, *Unstable modules over the Steenrod algebra, functors, and the cohomology of spaces*, Actes de l'Euroconférence "Modules of infinite length" Bielefeld, Septembre (1998), Trends in Mathematics, 2000 Birkhäuser Verlag.
- [55] L. Smith, *On Künneth theorem 1*, Math. Zeit., vol. 116, 1970, 94- 140.
- [56] L. Smith, *Lectures on the Eilenberg-Moore spectral sequence*, Lecture notes in mathematics, vol. 134, Springer-Verlag.
- [57] H. Toda, *Composition methods in homotopy groups of spheres*, Annals of Mathematics Studies. 49. Princeton, N. J. Princeton University Press,(1962).

ESPACES PROFINIS ET PROBLÈMES DE RÉALISABILITÉ DE STRUCTURES ALGÈBRIQUES COMME COHOMOLOGIE D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE

Résumé. En utilisant une méthode due à L. Schwartz, nous établissons une conjecture due à N. Kuhn qui affirme que l'action de l'algèbre de Steenrod sur la cohomologie d'un espace topologique à coefficients dans le corps premier \mathbb{F}_2 est soit localement finie, soit non polynômiale. Pour cela, nous construisons une suite spectrale d'Eilenberg-Moore dans le cadre de la théorie homotopique des espaces profinis de F. Morel (cette partie du travail est une collaboration avec F.-X. Dehon).

Nous démontrons pour cette suite spectrale, qui converge toujours au sens naïf, un théorème de convergence forte, dans l'esprit de celui de W. G. Dwyer. Nos preuves sont simplifiées par la propriété du calcul homotopique des espaces profinis, que nous établissons.

Nous montrons également qu'une algèbre instable connexe dont l'idéal d'augmentation n'est pas localement nilpotent admet une série de Loewy infinie 'aux nilpotents près'.

Enfin, nous donnons quelques exemples de modules instables non réalisables en utilisant des méthodes élémentaires.

Mots-clé : Algèbre de Steenrod, Algèbre homotopique, Homotopie, Modules instables, Problèmes de réalisabilité, Topologie, Suite spectrale d'Eilenberg-Moore.

...

PROFINITE SPACES AND TOPOLOGICAL REALIZABILITY OF ALGEBRAIC STRUCTURES

Abstract. We show that a translation into the framework of F. Morel's homotopy theory of profinite spaces of a method due to L. Schwartz leads to a proof at the prime 2 of N. Kuhn's conjecture that asserts that the Steenrod algebra's action on the finite field cohomology of a space has to be either locally finite or non polynomial. To this end, we introduce an Eilenberg-Moore spectral sequence for profinite spaces (this part is joint work with F.-X. Dehon).

By construction, this spectral sequence is always convergent in the naive sense. We show that an analog of W. Dwyer's strong convergence theorem holds in the profinite case. To simplify some technical points, we prove that the homotopical algebra of profinite spaces is *proper*.

We also show the following algebraic version of N. Kuhn's conjecture : a connected unstable algebra with non-nilpotent augmentation ideal has an infinite Loewy series 'up to nilpotent elements'.

We also prove that some unstable modules are not topologically realizable by elementary considerations.

Keywords : Eilenberg-Moore spectral sequence, Homotopical algebra, Homotopy, Realizability, Steenrod algebra, Topology, Unstable modules.